

П.О. Кравець

Національний університет “Львівська політехніка”,  
кафедра інформаційних систем та мереж

## ІГРОВА МОДЕЛЬ ХРОМАТИЧНОГО РОЗФАРБОВУВАННЯ ГРАФІВ

© Кравець П.О., 2008

**Сформульовано ігрову задачу розфарбовування графів в умовах дії випадкових стаціонарних завад. Запропоновано рекурентні методи розв’язування стохастичної гри. Побудовано ігровий алгоритм та здійснено комп’ютерне моделювання процесу розфарбовування графів. Досліджено вплив параметрів задачі на збіжність ігрового методу.**

**The game task of graphs coloring in conditions at action of random stationary noises is formulated. The recurrence methods of the stochastic game solving are offered. The game algorithm is constructed and computer modeling of a graphs coloring process is carried out. The task parameters influence on a game method convergence is investigated.**

### Вступ

Задачі автоматизованого проектування, розподілу ресурсів, складання розкладів, планування виробництва та інші розв’язуються на основі алгоритмів розфарбовування графів [1–3]. Неорієнтований граф без петель є  $g$ -хроматичним, якщо його вершини можна зафарбувати  $g$  кольорами так, що суміжні вершини будуть мати різний колір. Мінімально необхідна для цього кількість фарб називається хроматичним числом графа. У класичному формулюванні задача розфарбовування графа полягає у визначенні хроматичного числа та відповідних йому кольорів вершин.

З літературних джерел [4, 5] відомі алгоритми точного і наближеного розфарбовування графів. Наближені алгоритми ґрунтуються на евристиках і забезпечують знаходження наближеного значення хроматичного числа графа. Класичні алгоритми є детермінованими щодо формування оцінок поточних варіантів розфарбовування графів. У зв’язку з широким практичним застосуванням виникає потреба у розробленні нових ефективних алгоритмів, які здійснюють розфарбовування функціонально навантажених графів великої розмірності [6].

Формулювання ряду практичних задач, розв’язування яких зводиться до розфарбовування графів, можуть містити елементи невизначеності. Тоді для їхнього розв’язування необхідно розробити пошукові методи розфарбовування графів. Враховуючи розподілений характер об’єкта дослідження, розв’язати задачу розфарбовування в умовах апріорної невизначеності можна стохастичними методами одночасного (паралельного) пошуку кольорів усіх вершин графа. Методи паралельного стохастичного розфарбовування графів є недостатньо вивченими та висвітленими у науковій літературі.

Основою децентралізованого розфарбовування графів є вирішення конфліктів у призначенні кольорів вершин. Вибраний колір не може повторитися в усіх суміжних вершинах графа. З урахуванням цього розпаралелювання задачі розфарбовування графа може бути виконано на основі моделі повторювальної стохастичної гри [7, 8], коли розміщені у вершинах графа гравці здійснюють незалежний вибір однієї фарби із заданої палітри фарб. Аналізуючи поточну зафарбованість суміжних вершин, кожен гравець закріплює вдалішу комбінацію кольорів перерозподілом імовірностей вибору фарб.

Метою цієї роботи є розроблення ігрової моделі та методів децентралізованого розв'язування задачі розфарбовування графів в умовах дії завад на поточні значення цільових функцій гравців. Для досягнення мети необхідно виконати формулювання ігрової задачі розфарбовування графів в умовах невизначеності, розробити метод та алгоритм розв'язування ігрової задачі, виконати комп'ютерне моделювання ігрового розфарбовування графів, дослідити вплив параметрів задачі на збіжність ігрового методу.

### Формулювання ігрової задачі

Неорієнтований без петель граф  $(D, U)$  задається множиною вершин  $D$  та множиною ребер  $U$ . Нехай у кожній вершині графа знаходиться гравець, який має палітру  $N_i \in [2, |D|]$  фарб  $X^i = (x^i(1), x^i(2), \dots, x^i(N_i))$ , які він використовує для зафарбовування своєї вершини. У моменти часу  $n=1, 2, \dots$  гравці здійснюють незалежний випадковий вибір однієї із фарб  $x_n^i \in X^i$  на основі динамічних векторів змішаних стратегій  $p_n^i = (p_n^i(1), p_n^i(2), \dots, p_n^i(N_i))$  зі значеннями на одиничному симплексі  $S^{N_i}$  [9]. Після закінчення вибору фарб усіма гравцями кожен  $i$ -й гравець отримує поточний програш

$$\xi_n^i = \xi_n^i(x_n^{D_i}) = \sum_{j \in D_i} \delta_{ij} / |D_i|, \quad (1)$$

де  $\delta_{ij} = 0$ , якщо  $x_n^i \neq x_n^j$ , і  $\delta_{ij} = 1$ , якщо  $x_n^i = x_n^j$ . Поточний програш  $i$ -го гравця визначається відносною кількістю однакових з  $i$ -ю вершиною фарб у комбінованому варіанті вибору  $x_n^{D_i} \in X^{D_i} = \otimes_{j \in D_i} X^j$  гравців з підмножини сусідніх вершин  $D_i \subseteq D$ .

При дії завад гравці отримують спотворене значення поточного програшу:

$$\zeta_n^i = \xi_n^i + \mu^i, \quad (2)$$

де  $\mu^i = Normal(0, d^i)$  – нормально розподілена випадкова величина з нульовим математичним сподіванням та дисперсією  $d^i$ .

Якість розфарбовувань локальних областей графа оцінюється функціями середніх програшів:

$$\Phi_n^i = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \zeta_t^i \quad \forall i \in D. \quad (3)$$

Хід стохастичної гри спрямовується на мінімізацію функцій середніх програшів

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n^i \rightarrow \min \quad \forall i \in D. \quad (4)$$

Отже, спостерігаючи випадкові поточні програші (1), гравці повинні вибирати фарби  $x_n^i$  із палітри  $X^i$  так, щоб сформована послідовність варіантів  $\{x_n^i\}$  в асимптотиці часу задовольнила умову (4).

Розв'язки задачі векторної оптимізації (4) необхідно шукати у множині компромісних рішень, наприклад, рівноваги за Нешем або оптимальності за Парето [7, 9].

## Методи розв'язування ігрової задачі

Формування послідовностей  $\{x_n^i\}$  з потрібними властивостями виконаємо за допомогою рекурентних методів зміни векторів змішаних стратегій [10]:

$$p_{n+1}^i = \pi_{\varepsilon_{n+1}}^{N_i} \left\{ p_n^i - \gamma_n R(p_n^i, x_n^i, \zeta_n^i) \right\}, \quad (5)$$

де  $\pi_{\varepsilon_{n+1}}^{N_i}$  – проєктор на одиничний  $\varepsilon$ -симплекс  $S_\varepsilon^{N_i} \subseteq S^{N_i}$  [9];  $\gamma_n$  – монотонно спадна послідовність невід'ємних величин, яка регулює величину кроку методу;  $R$  – крок методу;  $\varepsilon_n$  – монотонно спадна послідовність невід'ємних величин, яка регулює швидкість розширення  $\varepsilon$ -симплексу.

Зміну елементів вектора змішаних стратегій побудуємо так, що при виборі стратегії  $x_n^i(j)$  елемент  $p_n^i(j)$  зменшується пропорційно до величини поточного програшу  $\zeta_n^i$ . Інші елементи вектора змішаних стратегій не змінюються або зростають пропорційно до  $\zeta_n^i$ . Після перерахунку векторів змішаних стратегій відбувається їхнє нормування методом проєкції на одиничний  $\varepsilon$ -симплекс. У результаті меншим значенням програшу будуть відповідати менші переміщення векторів змішаних стратегій на одиничному  $\varepsilon$ -симплексі.

Синтез рекурентних методів виконаємо методом стохастичної апроксимації [11]. Для цього припустимо, що математичні сподівання випадкових величин  $M\{\zeta_n^i(x)\} = v^i(x)$  відомі для всіх  $x \in X = \otimes_{i \in D} X^i$ . Тоді функція середніх програвів матричної гри обчислюється так:

$$V^i(p^{D_i}) = \sum_{x^{D_i} \in X^{D_i}} v^i(x^{D_i}) \prod_{j \in D_i; x^j \in X^j} p^j(x^j) \quad (6)$$

де  $p^{D_i} \in S^{D_i} = \prod_{j \in D_i} S^{N_j}$ ,  $p^i \in S^{N_i}$ .

Мета матричної гри полягає у мінімізації функцій середніх програвів:

$$V^i(p^{D_i}) \rightarrow \min_{p^i}.$$

Нехай математичне сподівання вектора руху методу (5) є градієнтом функції середніх програвів:

$$M\{R(p_n^i, x_n^i, \zeta_n^i)\} = \nabla_{p^i} V^i(p^{D_i}).$$

Враховуючи, що

$$\nabla_{p^i} V^i = M \left\{ \frac{\zeta_n^i}{e^T(x_n^i) p_n^i} e(x_n^i) \Big| p_n^i = p^i \right\},$$

де  $e(x_n^i)$  – одиничний вектор-індикатор вибору чистої стратегії  $x_n^i \in X^i$ , на основі стохастичної апроксимації одержимо градієнтний метод розв'язування ігрової задачі:

$$p_{n+1}^i = \pi_{\varepsilon_{n+1}}^{N_i} \left\{ p_n^i - \gamma_n \frac{\zeta_n^i e(x_n^i)}{e^T(x_n^i) p_n^i} \right\}. \quad (7)$$

Інші ігрові методи можна отримати на основі векторної умови доповняльної нежорсткості, яка є частковим випадком рівноваги за Нешем у повністю змішаних стратегіях [12]:

$$\nabla_{p^i} V^i = V^i e^{N_i}, \quad (8)$$

де  $e^{N_i}$  – вектор, що складається з  $N_i$  одиниць. Система (8) отримана розв’язуванням задачі умовної мінімізації диференційованих функцій  $V^i(p)$  на одиничних симплексах  $S^{N_i}$ .

Нехай  $M\{R(p_n^i, x_n^i, \zeta_n^i)\} = \nabla_{p^i} V^i(p) - V^i e^{N_i}$ . Враховуючи, що  $\nabla_{p^i} V^i(p) - V^i e^{N_i} = M\left\{\zeta_n^i \left[ \frac{e(x_n^i)}{e^T(x_n^i) p_n^i} - e^{N_i} \right] \middle| p_n^i = p^i \right\}$ , методом стохастичної апроксимації одержимо метод доповняльної нежорсткості:

$$p_{n+1}^i = \pi_{\varepsilon_{n+1}}^{N_i} \left\{ p_n^i - \gamma_n \zeta_n^i \left[ \frac{e(x_n^i)}{e^T(x_n^i) p_n^i} - e^{N_i} \right] \right\}. \quad (9)$$

Для урахування розв’язків на межі одиничного симплексу виконаємо поелементне зважування умови (8):

$$\Delta = \text{diag}(p^i) [V^i e^{N_i} - \nabla V^i] = 0,$$

де  $\text{diag}(p^i)$  – квадратна діагональна матриця порядку  $N_i$ , побудована з елементів вектора  $p^i$ .

Нехай  $M\{R_n \mid p_n^i = p^i\} = \text{diag}(p^i) [V^i e^{N_i} - \nabla_{p^i} V^i]$ . Враховуючи, що  $\text{diag}(p^i) (V^i e^{N_i} - \nabla_{p^i} V^i) = M\{\zeta_n^i [p_n^i - e(x_n^i)] \mid p_n^i = p^i\}$ , методом стохастичної апроксимації отримаємо метод зваженої доповняльної нежорсткості:

$$p_{n+1}^i = \pi_{\varepsilon_{n+1}}^{N_i} \left\{ p_n^i - \gamma_n \zeta_n^i [e(x_n^i) - p_n^i] \right\}. \quad (10)$$

Дослідження збіжності ігрових рекурентних методів виконаємо у класі монотонно спадних невід’ємних величин

$$\gamma_n = \gamma_0 n^{-\alpha}, \quad \varepsilon_n = \varepsilon_0 n^{-\beta}, \quad (11)$$

де  $\gamma_0, \alpha, \beta > 0$ ,  $\varepsilon_0 \in (0, \min_i N_i^{-1})$ .

Оцінювання середньоквадратичної швидкості збіжності рекурентних ігрових методів виконаємо за допомогою асимптотичного методу моментів Чжуна [13]:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^\theta M \left\{ \|\Delta_n\|^2 \right\} = \vartheta,$$

де  $\theta$  – порядок,  $\vartheta$  – величина швидкості збіжності,  $\|\Delta_n\|^2$  – похибка умови доповняльної нежорсткості (квадрат евклідової норми вектора). Більшим значенням  $\theta$  та меншим  $\vartheta$  відповідає більша швидкість збіжності ігрового методу.

Встановлено [14], що у знакододатних середовищах, для яких  $V^i(p^{D_i}) > 0$  на системі одиничних симплексів, порядок середньоквадратичної збіжності методів (7) та (9) становить  $\theta = \min(1 + \beta - \alpha, \alpha - \beta)$  при обмеженнях на параметри  $\alpha \in (0, 1]$ ;  $0 < \beta < \alpha$ . Порядок середньо-

квадратичної швидкості збіжності методу (10) дорівнює  $\theta = \min(1 + \beta - \alpha, \alpha)$  при обмеженнях  $\alpha \in (0,1]$ ;  $\beta > 0$ .

Максимальний порядок швидкості збіжності ігрових методів у знакододатних середовищах дорівнює:  $\theta_{\max} = 0.5$  – для методів (7) та (9);  $\theta_{\max} = 1$  – для методу (10). Можливість досягнення максимального порядку визначається належним підбором початкових значень параметрів методів  $\gamma_0$  та  $\varepsilon_0$ .

### Ігровий алгоритм

Крок 1. Ініціалізація методу. Задати кількість гравців  $L = |D|$ , кількості чистих стратегій  $N_i$ ,  $i = \overline{1, L}$ , палітри фарб  $X^i$ , початкові значення параметрів ігрового методу  $\gamma_0; \alpha; \varepsilon_0; \beta$  та початкові значення векторів змішаних стратегій  $p_0^i(j) = N_i^{-1}$ ,  $j = \overline{1, N_i}$ . Задати момент часу  $n = 1$ .

Крок 2. Вибір чистих стратегій гравців та визначення варіанта розфарбовування графа. Для кожного  $i$ -го гравця згенерувати випадкове число  $\omega$ , розподілене за рівномірним законом в інтервалі  $[0,1]$ , та визначити номер  $k$  чистої стратегії з виконання умови

$$k = \left( K \left| \min_K \sum_{j=1}^K p_n^i(j) > \omega \right. \right), K = \overline{1, N_i}.$$

За номером чистої стратегії визначити колір фарби  $x^i(k) \in X^i$ .

Крок 3. Визначення поточних програшів гравців. Поточні програші визначаються згідно з (2). Нормально розподілені випадкові величини обчислено через суму дванадцяти рівномірно розподілених величин:

$$\mu^i = m^i + \sqrt{d^i} \left( \sum_{j=1}^{12} \omega_j - 6 \right),$$

де  $m^i = 0$ ;  $\omega \in [0,1]$  – випадкове число, розподілене за рівномірним законом.

Крок 4. Зміна регульованих параметрів алгоритму. Обчислити значення параметрів  $\gamma_n$  та  $\varepsilon_n$  у момент часу  $n$  згідно з (11).

Крок 5. Перерахунок векторів змішаних стратегій. Обчислення нових векторів змішаних стратегій здійснюється за одним із рекурентних перетворень (7), (9) або (10) із застосуванням проектора на одиничний  $\varepsilon$ -симплекс [9].

Крок 6. Обчислення характеристики гри. Характеристика гри визначається функціями поточних програшів (3), усередненими по кількості гравців:

$$\overline{\Phi}_n = L^{-1} \sum_{i=1}^L \Phi_n^i. \quad (12)$$

Крок 7. Перевірка умови завершення гри. Момент закінчення гри визначається виконанням умови правильного розфарбовування графа  $\overline{\Phi}_n = 0$  або досягненням заданої кількості кроків. Якщо умова не виконана, то задати  $n = n + 1$  і перейти на крок 2, інакше – на крок 8.

Крок 8. Виведення фінальних (при  $\overline{\Phi}_n = 0$ ) або середніх значень випадкових величин  $x_n^i$ .

## Результати моделювання

Ефективність роботи ігрового методу розфарбовування графів досліджено на основі розробленої програмної моделі. Дані отримано для ігрового методу (10) з параметрами  $\gamma_0 = 1$ ;  $\alpha = 0.01$ ;  $\varepsilon_0 = 0.999N^{-1}$ ;  $\beta = 2$ ;  $N = \max_{i \in D} N_i \leq L$ .

Вивчено вплив кількості вершин  $L$  та дисперсії  $d$  програшів гравців на ефективність розфарбовування повнозв'язного, двонаправленого кільцевого, двонаправленого лінійного та регулярного сіткового графа. Ефективність ігрового методу визначається кількістю кроків  $n_{out}$ , необхідних для розфарбовування графа. Середню кількість кроків обчислено по  $K = 100$  реалізаціях ігрового методу:

$$\bar{n} = K^{-1} \sum_{k=1}^K n_{out}(k).$$

Динаміка гри ілюструється часовими графіками функцій середніх програшів (12), зображеними на рис. 1 у логарифмічному масштабі для задачі розфарбовування повнозв'язного графа з 10 вершинами за допомогою 10 фарб. Результати отримано за відсутності впливу завад на значення поточних оцінок якості розфарбовування графа.

Зменшення функції середніх програшів гравців у часі вказує на збіжність ігрового методу, що проявляється у правильному розподілі фарб у сусідніх вершинах гравців. Як видно з рис. 1, розфарбовування заданого графа настає у середньому через 100 кроків, що є значно меншим від потужності повної множини варіантів.

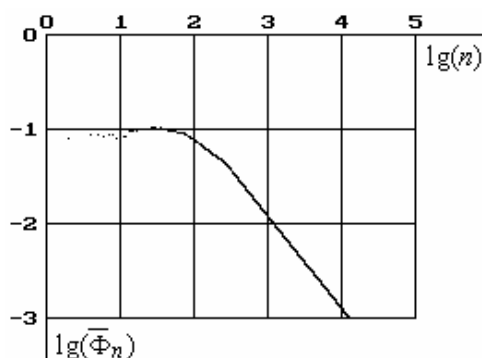


Рис. 1. Зміна функції середніх програшів у часі

Враховуючи, що поточні критерії розфарбовування визначаються комбінацією фарб у сусідніх вершинах, то топологія та розмірність графа впливає на ефективність роботи ігрового методу. Результати такого впливу зображено на рис. 2 у вигляді графіків середньої кількості кроків стохастичної гри, отриманих при  $d = 0$  для двонаправленого лінійного, двонаправленого кільцевого та повнозв'язного графів. Для усіх структур графів палітра фарб визначається кількістю вершин графа (кількістю гравців). По осі абсцис відкладено кількість вершин графів, а по осі ординат – середню кількість кроків, необхідних для розфарбовування відповідного графа.

Як видно з рис. 2, збільшення кількості вершин призводить до зростання середньої кількості кроків гри розфарбовування усіх досліджених графів. При зростанні зв'язності графа кожен гравець отримує більше інформації щодо поточних станів інших гравців. У результаті навчання гравців

(перебудови векторів змішаних стратегій) буде ефективнішим, що проявляється у зменшенні середньої кількості кроків, необхідних для правильного розфарбовування графа.

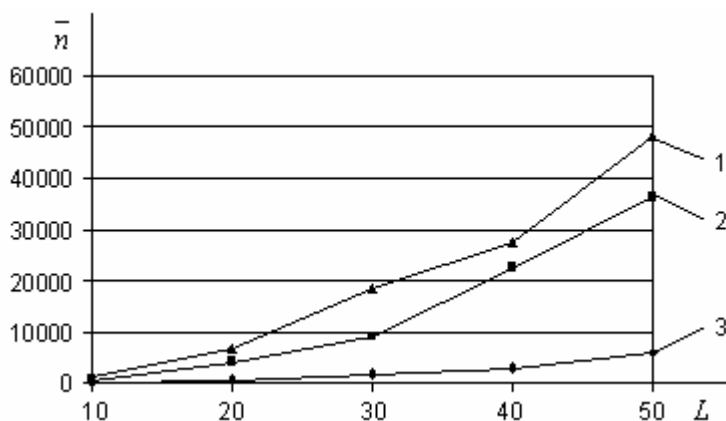


Рис. 2. Залежність середньої кількості кроків стохастичної гри від кількості вершин графа:  
1 – двонаправленого лінійного; 2 – кільцевого двонаправленого; 3 – повнозв’язного

Результати ігрового розфарбовування регулярного планарного графа у вигляді квадратної сітки з прямокутними комірками подано на рис. 3. Для розв’язування цієї задачі необхідно лише дві фарби. Вісь абсцис на рис. 3 визначає порядок квадратної сітки (кількість вершин по одному координатному напрямку). Середня кількість кроків розфарбовування відповідного сіткового графа відкладена по осі ординат.

З графіка на рис. 3 видно, що ігровий стохастичний метод ефективно розв’язує задачу бінарного розфарбовування регулярного сіткового графа. Результатом збільшення кількості вершин графа є зростання кількості кроків, необхідних для його розфарбовування.

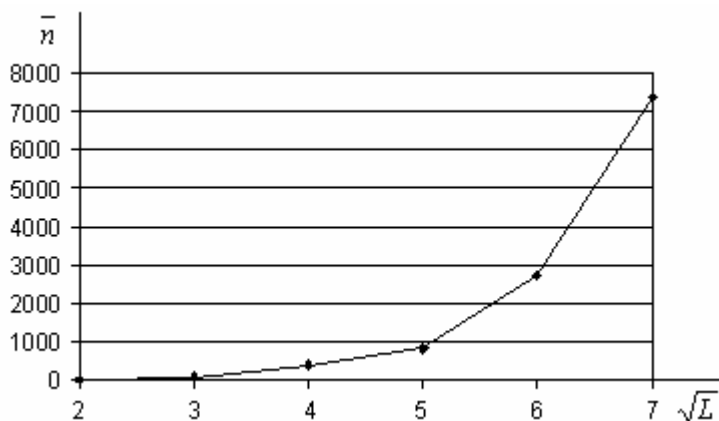


Рис. 3. Залежність середньої кількості кроків стохастичної гри від кількості вершин регулярного сіткового графа

У виконаних експериментах ефективність ігрового методу розфарбовування графів оцінювалась зменшенням кількості кроків відносно повної кількості варіантів. Зазначимо, що за відсутності завад (1) ефективнішими будуть детерміновані методи розфарбовування графів [4, 5]. Однак при дії завад детерміновані методи, зокрема метод повного перебору варіантів, не працюють, адже тоді значення поточних критеріїв якості розфарбовування графів є випадковими величинами.

Згідно з (2) завади діють на значення поточних програшів гравців і призводять до їхнього спотворення. Результатом цього є сповільнення швидкості збіжності ігрового методу, що видно з рис. 4, де подано графіки залежності кількості кроків гри від розмірності повнозв'язного графа. Графік 1 отримано для дисперсії завад  $d = 0.01$ , а графік 2 – за відсутності дії завад.

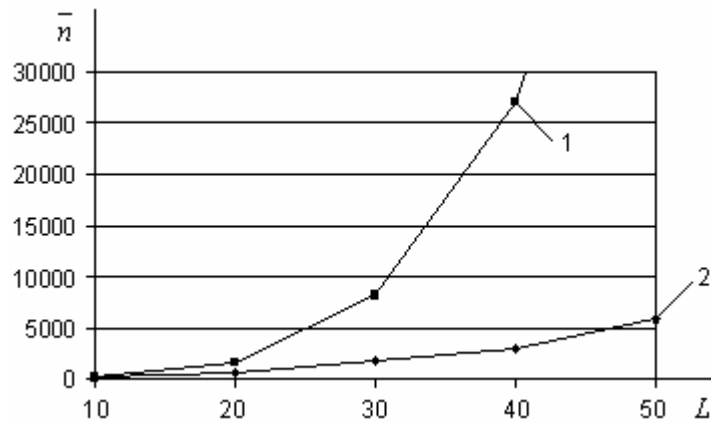


Рис. 4. Залежність середньої кількості кроків стохастичної гри від кількості вершин та дисперсії поточних оцінок якості розфарбовування графа

З рис. 4 видно нелінійну залежність впливу завад від кількості вершин графа. Відношення кількості кроків гри із завадами до відповідної кількості кроків гри за відсутності завад зростає із зростанням кількості вершин графа.

При дії завад актуальним є дослідження впливу їхньої інтенсивності на збіжність ігрового методу розфарбовування графів. Інтенсивність завад класу “білий шум” визначається значенням їхньої дисперсії. Вплив дисперсії на збіжність ігрового методу розфарбовування повнозв'язного графа з  $L = 10$  вершинами подано на рис. 5 та 6.

Зростання інтенсивності завад призводить до зменшення швидкості збіжності стохастичної гри, результатом чого є зростання середньої кількості кроків, необхідних для розфарбовування графа.

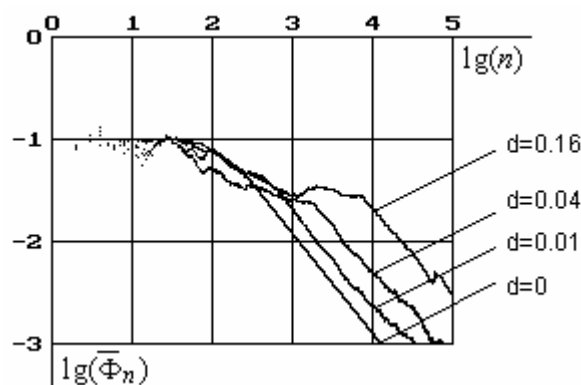


Рис.5. Залежність функції середніх програшів гравців від дисперсії



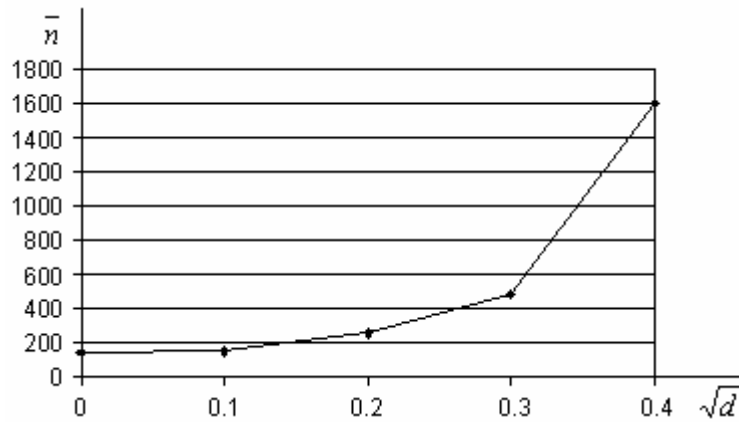


Рис. 6. Залежність середньої кількості кроків стохастичного розфарбовування графа від дисперсії

Під час дослідження ігрового методу (10) при  $d = 0$  виявлено цікавий, але функціонально тупиковий, ефект “близнюків”. Його суть полягає у такому. Два гравці, стратегії яких генеруються методом (10), а поточні програші визначаються згідно з (1), навчаються вибирати однакові чисті стратегії незалежно від їхньої кількості. Іншими словами, ігровий метод (10) не розв’язує задачу розфарбовування графа з двома вершинами.

Візуально ефект “близнюків” можна спостерігати на рис. 7, де зображено графіки функцій середніх програшів для різної кількості чистих стратегій гравців. Зростання та стабілізація середніх програшів свідчать про те, що  $L = 2$  гравці не можуть навчитися вибирати різні фарби для своїх вершин з палітри фарб  $N \geq L$ , яка набагато перевищує кількість вершин графа.

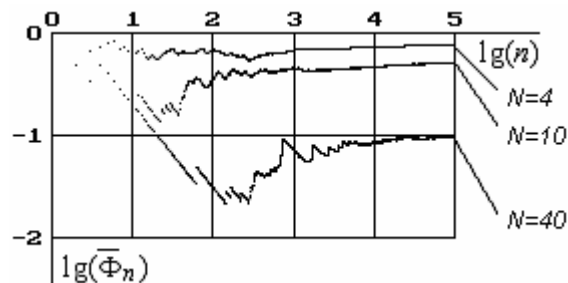


Рис.7. Зміна функції середніх програшів у часі для ефекту “близнюків”

Детальніший аналіз ефекту “близнюків” показує, що він забезпечується однаковими векторами змішаних стратегій, які формуються у ході навчання гравців. Це видно з рис. 8, де зображено суміщені для двох гравців значення елементів векторів змішаних стратегій. Ліві стовпчики позначають змішані стратегії першого, а праві – другого гравця. Результати отримано для  $N = 4$  чистих стратегій гравців.

Породжуваний методом (10) ефект “близнюків” є інваріантним до послідовності розміщення фарб у палітрах гравців. Зміна нумерації фарб у палітрі може призвести до іншого розподілу імовірностей вибору варіантів, але не забезпечує правильного розфарбовування графа.

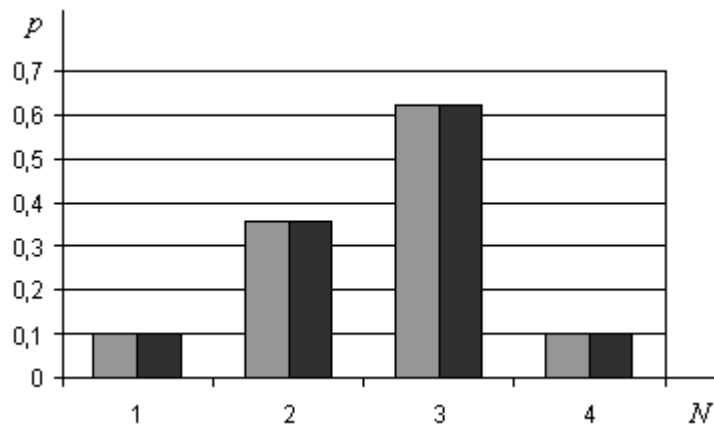


Рис. 8. Суміщений розподіл вибору фарб гравцями для ефекту “близнюків”

Ефект “близнюків” повністю визначається структурою рекурентного методу (10), який побудовано так, що штрафна зміна векторів змішаних стратегій відбувається тільки у разі вибору гравцями однакових фарб. Якщо ж гравці вибирають різні фарби, то їхні програші (1) набувають нульового значення, за якого не відбувається зміни векторів змішаних стратегій. Завдяки адаптивному механізму навчання дії гравців синхронізуються.

Вихід з тупикового стану можливий при введенні дії завад на поточні значення оцінок якості розфарбовування графа, збільшенні кількості вершин графа, або зміні рекурентного методу навчання гравців.

На рис. 9 зображено зміну функцій середніх програшів гравців при дії завад з дисперсією  $d = 10^{-4}$ . Порівнюючи результати, зображені на рис. 7 та 9, знаходимо, що дія завад (навіть незначної інтенсивності) забезпечує подолання ефекту “близнюків”.

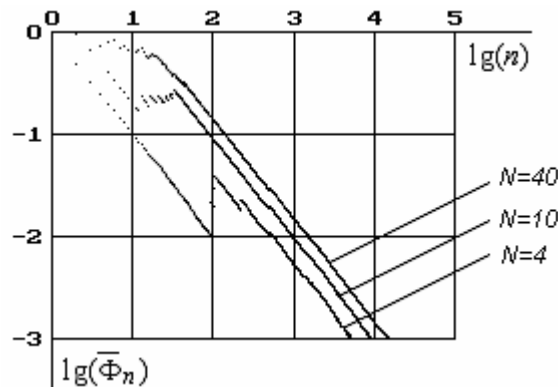


Рис. 9. Подолання ефекту “близнюків” дією завад

Відповідні розподіли імовірностей вибору стратегій гравців зображено на рис. 10. Як і раніше, лівий стовпчик позначає імовірність вибору стратегії першого, а правий – другого гравця.

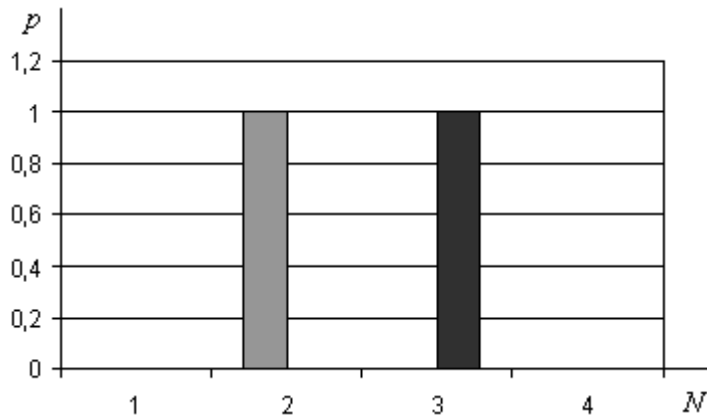


Рис. 10. Суміщений розподіл вибору фарб гравцями після подолання ефекту “близнюків”

Порівняння розподілів, зображених на рис. 8 та 10 показує, що при дії завад два гравці навчаються вибирати різні фарби з близькою до 1 імовірністю.

### Висновки

Пошукові методи стохастичних ігор забезпечують децентралізоване розв’язування задачі розфарбовування графів. В умовах повної інформації вони поступаються за ефективністю відомим детермінованим методам. Водночас, завдяки властивості самонавчання, ігрові методи виконують розв’язування детермінованої задачі розфарбовування графів в середньому за меншу кількість кроків, ніж метод повного перебору варіантів.

В умовах апріорної невизначеності метод повного перебору варіантів не працює, оскільки функція програшів набуває випадкові значення для фіксованих станів системи. У цих умовах розв’язування задачі розфарбовування графів забезпечується пошуковими методами. У класі пошукових методів ефективнішими будуть ті, які адаптуються до невизначеностей та здійснюють розпаралелювання пошуку. Саме такі властивості мають методи стохастичних ігор.

За результатами моделювання найбільша швидкість збіжності ігрового методу досягається для задачі розфарбовування повнозв’язного графа. При послабленні зв’язності графа швидкість збіжності зменшується, що виявляється у зростанні кількості кроків, необхідної для розфарбовування графа. Зменшення швидкості збіжності гри спостерігається також при зростанні дисперсії завад у стохастичному формулюванні задачі розфарбовування графів.

1. Мелихов А. Н. и др. *Применение графов для проектирования дискретных устройств*. – М.: Наука, 1984.
2. Робертс Ф. С. *Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам*. – М.: Наука, 1986.
3. Бурков В. Н., Заложнев А. Ю., Новиков Д. А. *Теория графов в управлении организационными системами*. – М.: СИНТЕГ, 2001.
4. Харари Ф. *Теория графов*. – М.: Мир, 1973.
5. Кристофидес Н. *Теория графов. Алгоритмический подход*. – М.: Наука, 1990.
6. Курейчик В.М. *Новый подход к раскраске и определению клик графа на основе квантовых алгоритмов // Известия ТРТУ № 3, 2004*. – С. 29 – 34.
7. Доманский В.К. *Стохастические игры // Математические вопросы кибернетики*. – 1988. – № 1. – С. 26 – 49.
8. Fudenberg D., Levine D.K. *The Theory of Learning in Games*. MIT Press, 1998.
9. Назин А.В., Позняк А.С. *Адаптивный выбор вариантов: Рекуррентные алгоритмы*. – М.: Наука, 1986.
10. Цыпкин Я.З., Позняк А.С. *Рекуррентные алгоритмы оптимизации в условиях неопределенности // Итоги науки и техники. Сер. Техническая кибернетика*. – 1989. – Т. 16. – С. 3 – 70.
11. Вазан М. *Стохастическая аппроксимация*. – М.: Мир, 1972.
12. Воробьев Н.Н. *Основы*

теории игр: Бескоалиционные игры. – М.: Наука, 1984. 13. Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З. Стохастическая оптимизация и рекуррентное оценивание. – М.: Наука, 1972. 14. Кравець П.О. Ігрова самоорганізація системи агентів з індивідуальним оцінюванням стратегій // Комп'ютерні системи та мережі: Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. – 2005. – № 546. – С. 75 – 85.

УДК 004.421.2:517.443

І.О. Процько

Національний університет “Львівська політехніка”,  
кафедра систем автоматизованого проектування

## ПІДХІД ЕФЕКТИВНОГО ОБЧИСЛЕННЯ ДИСКРЕТНИХ ГАРМОНІЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ЧЕРЕЗ ЦИКЛІЧНІ ЗГОРТКИ

© Процько І.О., 2008

**Розглянуто ефективне обчислення дискретних гармонічних перетворень. Обчислювальний алгоритм визначається за сформованою структурою дискретної базисної матриці. Симетричні циклічні згортки є основою ефективного обчислення дискретних гармонічних перетворень.**

**The efficient computation of discrete harmonic transforms is introduced. The algorithm of computation are determined the formed structure of discrete basis matrix. The symmetrical cyclic convolutions are fundamental of algorithm for efficient computation discrete harmonic transform.**

### Вступ

У багатьох прикладних задачах для ефективного дослідження та аналізу систем сигнали складної форми зображають лінійним перетворенням елементарних (базисних) функцій. Під час проходження у системі неперервні сигнали складної форми зображають у вигляді зваженої суми базисних функцій

$$U(t) = \sum_k C_k \phi(t)_k, t \in [t_1, t_2]. \quad (1)$$

Отже, за вибраного базису сигнал  $U(t)$  повністю задається коефіцієнтами  $C_k$ . Таку сукупність чисел називають дискретним спектром сигналу. Спектри є зручною аналітичною формою зображення сигналів. Такий підхід на основі базисного набору особливо продуктивний для аналізу лінійних інваріантних до часу систем. Історично склалось, що співвідношення (1) називають узагальненим рядом Фур'є, а коефіцієнти  $C_k$  – узагальненими коефіцієнтами Фур'є. Адаже вперше для визначення  $C_k$  – на основі властивості ортогональності було застосовано при розкладі в ряд Фур'є. Визначення спектральних складових значно легше обчислюється в ортогональних базисах. Повні системи ортогональних функцій забезпечують як завгодно малу різницю між неперервною функцією та її рядом за необмеженого збільшення кількості його членів.

Іншим застосуванням перетворень для класу дискретних лінійних систем є визначення співвідношення між її входом  $X$  та виходом  $Y$ , що задається у вигляді згортки

$$Y[n] = \sum_k x[k] * h[n - k], k \in [-\infty, \infty], \quad (2)$$