УДК 517.526

Т.М. Антонова, В.Р. Гладун
Національний університет "Львівська політехніка",
вул. С. Бандери, 12, 79013, м. Львів, Україна

РОЗВИНЕННЯ ВІДНОШЕНЬ ДЕЯКИХ ГІПЕРГЕОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ ЧОТИРЬОХ ЗМІННИХ У ГІЛЛЯСТІ ЛАНЦЮГОВІ ДРОБИ

Розглядаються такі гіпергеометричні функції чотирьох змінних [1]:

$$K_{15}(a,b_1,b_2,b_3,b_4,b_5;c;z)=\sum_{k,m,n,p=0}^{\infty}\frac{(a)_{k+m+n}(b_1)_k(b_2)_m(b_3)_n(b_4)_p(b_5)_p}{(c)_{k+m+n+p}}\frac{z_1^k z_2^m z_3^n z_4^p}{k!m!n!p!},$$

$$K_{16}(a_1,a_2,b_1,b_2;c;\bar{z})=\sum_{k,m,n,p=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{k+m}(b_1)_{k+n}(b_2)_{m+p}(a_2)_{n+p}}{(c)_{k+m+n+p}}\frac{z_1^k z_2^m z_3^n z_4^p}{k!m!n!p!},$$

$$K_{20}(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3,b_4;c;z)=\sum_{k,m,n,p=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{k+m}(a_2)_{n+p}(b_1)_k(b_2)_m(b_3)_n(b_4)_p}{(c)_{k+m+n+p}}\frac{z_1^k z_2^m z_3^n z_4^p}{k!m!n!p!},$$

$$K_{21}(a,b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6;c;z)=\sum_{k,m,n,p=0}^{\infty}\frac{(a)_{k+m}(b_1)_k(b_2)_m(b_3)_n(b_4)_p(b_5)_p(b_6)_n}{(c)_{k+m+n+p}}\frac{z_1^k z_2^m z_3^n z_4^p}{k!m!n!p!},$$

де $a,a_1,a_2,a_5,b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6,c$ − комплексні сталі (параметри відповідних функцій), причому $c\neq 0,1,\ldots,$ $\bar{z}=(z_1,z_2,z_3,z_4)\in\mathbf{C}^4$, $(\alpha)_j$ − символ Похгамера:

$$(\alpha)_0=1,\ (\alpha)_j=\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+j-1),\quad j=1,2,\ldots\ .$$

Ці гіпергеометричні функції одночасно є узагальненнями гіпергеометричних функцій Аппеля $F_1(a,b_1,b_2;c;z_1,z_2)$ і $F_3(a_1,a_2,b_1,b_2;c;z_1,z_2)$.

Встановлено рекурентні співвідношення, використовуючи які побудовані розвинення у гіллясті ланцюгові дроби (ГЛД) таких відношень:

$$\frac{K_{15}(a,b_1,b_2,b_3,b_4,b_5;c;\bar{z})}{K_{15}(a+1,b_1+1,b_2,b_3,b_4,b_5;c+1;\bar{z})},\quad \frac{K_{15}(a,b_1,b_2,b_3,b_4,b_5;c;\bar{z})}{K_{15}(a,b_1,b_2,b_3,b_4+1,b_5+1;c+1;\bar{z})},$$

$$\frac{K_{16}(a_1,a_2,b_1,b_2;c;\bar{z})}{K_{16}(a_1+1,a_2,b_1+1,b_2;c+1;\bar{z})},\quad \frac{K_{16}(a_1,a_2,b_1,b_2;c;\bar{z})}{K_{16}(a_1+1,a_2,b_1,b_2+1;c+1;\bar{z})},$$

$$\frac{K_{20}(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3,b_4;c;\bar{z})}{K_{20}(a_1+1,a_2,b_1+1,b_2,b_3,b_4;c+1;\bar{z})},\quad \frac{K_{20}(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3,b_4;c;\bar{z})}{K_{20}(a_1,a_2+1,b_1,b_2,b_3+1,b_4;c+1;\bar{z})},$$

$$\frac{K_{21}(a,\ b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6;c;\bar{z})}{K_{21}(a+1,\ b_1+1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6;c+1;\bar{z})},\quad \frac{K_{21}(a,\ b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6;c;\bar{z})}{K_{21}(a,\ b_1,b_2,b_3+1,b_4,b_5,b_6+1;c+1;\bar{z})}.$$

Одержані ГЛД загального вигляду з 4 гілками розгалужень можна трактувати як 4-вимірні аналоги ланцюгових дробів Ньорлунда, а також як узагальнення розвинень відношень

$$\frac{F_1(a,b_1,b_2;c;z_1,z_2)}{F_1(a+1,b_1+1,b_2;c+1;z_1,z_2)},\qquad \frac{F_3(a_1,a_2,b_1,b_2;c;z_1,z_2)}{F_3(a_1+1,a_2,b_1+1,b_2;c+1;z_1,z_2)}$$

у ГЛД загального вигляду з 2 гілками розгалужень.

1. *Exton H. Multiple hypergeometric functions and applications. –New York–Sydney–Toronto, Chichester, Ellis Horwood, 1976. – 376 p.*