

# Computer Simulation of 2-D Liquid Flow for Studing the “Memory Effect” in the Ship Hull Loadings Calculation

Viktoriya Tudoran

Computer-aided Systems Software Department,  
National University Of Shipbuilding, UKRAINE, Nikolaev,  
Geroev Stalingrada avenue 9,  
E-mail: opa-viktoriya@yandex.r

The aim of the introduced paper is the improvement of the existed methods of ship hull loadings calculation and assessment of the existed method relevance. The theory of the liquid overcut brings the task of 3D ship flow to liquid flow task of simulation with free surface, induced by the movement of immersed hard contour in it.

The task in this elaborated computer model is considered in nonlinear organization. To solve this task the step-by-step method is used. At every time moment this flow can be considered as a quasi-constant and in order to define hydro-dynamic characteristics at the edge of the flow field the Eulerian scheme. Relocation of the free surface position in time is calculated by the Lagrangian scheme. On the basis of the calculated in Eulerian tasks coordinate position of free surface and value of potential in them, the form of free surface is determined at the next step[4].

In order to calculate the flow the theory of complex potential is utilized through the common values of the potential, the speed of the flow is determined and then from Bernuli integral, it is defined pressure and strength which influence the hard contour.

The complex method of boundary item allows to bring this task to the system of linear algebraic equations concerning the values of potential in reseau points which are placed at the edge of the field. The system of sloving the equations results on the basis of the integral Koshi formula (4), which ties up the value of analytical function in some point  $z_0$  which is closed in the field with integral along the edge of the flow field.

The application of the method of least squares in complex method of boundary items allowed receiving certain stableness of the solving and eliminating the error in the zones of meeting-point of free surface and hard contour.

The conducted research for the tasks of the immersing equilateral wedge-shaped contour comparing with the Cummins and Wagner methods [6], which use the coefficients which are determined by the linear theory. The results almost match within slight fluctuations, with increasing the fluctuations don't match. The value of memory effect in Cummins method is exceeded. The raising of the free surface is not considered in Wagner method.

*Переклад зроблено Горьковою Н.Г., центр іноземних мов «Universal Talk», www.utalk.com.ua*

# Комп'ютерне моделювання плоскої течії рідини для дослідження впливу “ефекту пам'яті” при розрахунку навантажень на корпус судна

Вікторія Тудоран

Кафедра програмного забезпечення автоматизованих систем, Національний університет кораблебудування, УКРАЇНА, м.Миколаїв, пр.Героїв Сталінграду, 9,  
E-mail: opa-viktoriya@yandex.ru

*Представлена комп'ютерна модель плоскої течії рідини з вільною поверхнею, зоснована на комплексному методі граничних елементів (КМГЕ) з використанням метода найменших квадратів (МНК), дозволила дослідити „ефект пам'яті” при розрахунку гідродинамічних навантажень на корпус судна.*

**Ключові слова** – комп'ютерна модель, гідродинамічні навантаження, комплексний метод граничних елементів, плоска течія рідини.

## I. Вступ

У практичних методах розрахунку хитавиці й навантажень на судно використовується гіпотеза плоских перерізів, що зводить задачу про тривимірне обтікання водою корпусу судна до двовимірного.

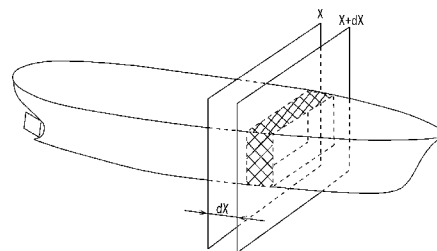


Рис. 1 Визначення плоских перерізів

У даній роботі вирішується задача плоского обтікання шпангоутного перерізу судна, що перетинає вільну поверхню води, при вертикальному русі. Область течії, обмежена вільною поверхнею води, зануреною частиною контуру, довільною лінією на відстані, де її впливом на течію біля контуру можна знехтувати.

Рідина вважається ідеальною, ваговою й нестисливою. Для розрахунку течії використовується теорія комплексного потенціалу. Через комплексний потенціал визначається швидкість течії рідини

$$\bar{w}(z) = v_x(x, y) - i \cdot v_y(x, y) = -\frac{dw}{dz} \quad (1)$$

де  $\omega(z) = \varphi(x, y) + i \cdot \psi(x, y)$  - комплексний потенціал,  $z = x + iy$  - комплексна змінна;  $\varphi$  - дійсний потенціал;  $\psi$  - функція току;  $i$  - уявна одиниця.

Нелінійні граничні умови задовольняються для поточного положення контуру перерізу й вільної поверхні. На вільній поверхні в початковий момент

часу заданий потенціал  $\phi$ . Зміна граничного значення потенціалу в часі визначається на основі інтеграла Бернуллі, тиск на вільній поверхні дорівнює атмосферному

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{v^2}{2} + g \cdot y, \quad (2)$$

де  $dt$  – зміна часу,  $v$  – швидкість точок границі,  $y$  – ордината положення точки. На контурі шпангоута задається функція току

$$\psi(P) = \psi(P_0) + \int_{P_0}^P v_n \cdot d\Gamma, \quad (3)$$

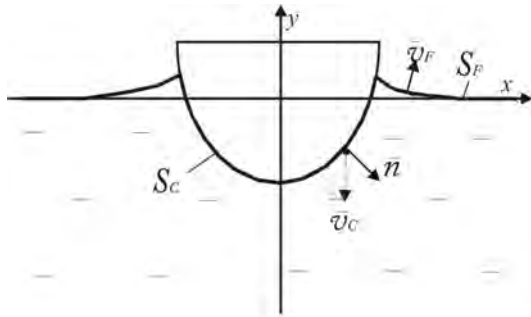


Рис. 2 Область течії

## II. Розв'язання задачі розрахунку течії за КМГЕ з використанням МНК (Ейлерова постановка)

Комплексний метод граничних елементів приводить цю задачу до системи лінійних алгебраїчних рівнянь щодо значень потенціалу у вузлових точках [1], розташованих на границі області. Розв'язуюча система рівнянь методу ґрунтується на інтегральній формулі Коші, що зв'язує значення аналітичної функції в будь-якій точці замкнутої області з інтегралом по її границі  $\Gamma$ .

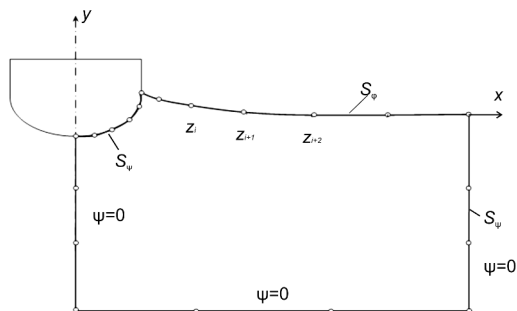


Рис. 3 Дискретизація області течії

Інтеграл записується як сума інтегралів по елементах границі  $\Gamma_i = [z_i, z_{i+1}]$ , де  $z_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ), вузлові точки елементів:

$$2\pi i \omega(z_0) = \oint_{\tilde{\Gamma}} \frac{\omega(z)}{z - z_0} dz = \sum_{i=1}^N \int_{\tilde{\Gamma}_i} \frac{\omega(z)}{z - z_0} dz, \quad (4)$$

Для отримання розв'язуючої системи рівнянь використаний метод найменших квадратів, що

поліпшило стійкість розв'язку в порівнянні з методом колокації. Розв'язуючи рівняння виходять із умови мінімуму квадрата відхилення між лівою й правою частинами інтегральної формули Коші.

$$S^2 = \int_{\tilde{\Gamma}} \left| 2\rho w(z) - \sum_{k=1}^N (U_k(z)w_k - V_k w_k^T) \right|^2 p(\tilde{A}) d\tilde{A} \rightarrow \min \quad (5)$$

$$U_i = 2[\eta_{0i}(\eta_{0i} - 1) + \eta_{0i-1}(1 - \eta_{0i})] + (\eta_{0i} - 1)^2(2\eta_{0i} + 1) \ln \frac{\eta_{0i} - 1}{\eta_{0i}} + \eta_{0i}^2(3 - 2\eta_{0i-1}) \ln \frac{\eta_{0i-1} - 1}{\eta_{0i-1}}$$

$$V_i = (z_i - z_{i-1}) \left[ -\frac{1}{6} - \frac{1}{2} \eta_{0i-1} + \eta_{0i-1}^2 + \eta_{0i-1}^2 (\eta_{0i-1} - 1) \ln \frac{\eta_{0i-1} - 1}{\eta_{0i-1}} \right] + (z_{i+1} - z_i) \left[ \frac{1}{3} - \frac{3}{2} \eta_{0i} + \eta_{0i}^2 + \eta_{0i} (\eta_{0i} - 1)^2 \ln \frac{\eta_{0i} - 1}{\eta_{0i}} \right]$$

$$\eta_{0i} = \frac{z - z_i}{z_{i+1} - z_i}; \quad \eta_{0i-1} = \frac{z - z_{i-1}}{z_i - z_{i-1}}$$

де  $U_k, V_k$  – коефіцієнти впливу  $k$ -того вузла, отримані через вузлові значення комплексного потенціалу при його апроксимації поліномами Ерміту третього ступеня, що забезпечує безперервні похідні на границі (клас гладкості  $C^1$ ). [2]

$$\alpha_1 = 2\eta^3 - 3\eta^2 + 1; \quad \alpha_2 = \eta^3 - 2\eta^2 + \eta;$$

$$\alpha_3 = -2\eta^3 + 3\eta^2; \quad \alpha_4 = \eta^3 - \eta^2$$

При визначеному комплексному потенціалі, обчислюється швидкість течії  $v$ , тиск із інтеграла Бернуллі, інтегруванням тиску сила, що діє на жорсткий контур.

$$F = \rho \int_{\Gamma_2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{v^2}{2} - gy \right) dx;$$

$$F_d = \rho \int_{\Gamma_2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{v^2}{2} \right) dx, \quad (6)$$

де  $F$  – повна сила,  $F_d$  – гідродинамічна складова [3].

Запишемо вираз (5) у матричній формі

$$S^2 = \oint_{\tilde{\Gamma}} \left( \sum_{k=1}^N (2\pi i \Lambda_k - W_k) \Omega_k \right) \left( \sum_{m=1}^N (2\pi i \Lambda_m - W_m) \Lambda_m \right) d\tilde{A} = \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N \Omega_k^T \left( \int_{\tilde{\Gamma}} (2\pi i \Lambda_k - W_k)^T (2\pi i \Lambda_m - W_m) d\Gamma \right) \Omega_m,$$

де  $k, m$  – номер вузлових точок.

Введемо

$$H_{km} = \int_{\tilde{A}} (2\pi i \Lambda_k - W_k)^T (\overline{2\pi i \Lambda_m - W_m}) d\tilde{A} = 4p^2 \Lambda_k^T \bar{\Lambda}_m - 2pi (\Lambda_k^T \bar{W}_m - W_k^T \bar{\Lambda}_m) + W_k^T W_m \quad (7)$$

Тут  $W_k$  - вектор коефіцієнтів наближення  $U_k, V_k$ ;

$\Omega$  - вектор комплексного потенціалу та його похідної;

$$\Lambda_k = \begin{cases} 0 & e > k \cdot \text{або} \cdot e \leq k-1 \\ (a_3(h); a_4(h_k) \cdot (z_k - z_{k-1})) & e = k-1 \\ (a_1(h); a_2(h_k) \cdot (z_{k+1} - z_k)) & e = k \end{cases}$$

З введенням позначення (7) квадрат нев'язки записується як

$$S^2 = \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N \Omega_k^T H_{km} \bar{\Omega}_m$$

Розв'язуюча система, що отримується з умов мінімуму нев'язки

$$\begin{cases} \frac{\partial S^2}{\partial \Phi_k} = 0 \\ \frac{\partial S^2}{\partial \Psi_k} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Диференціали квадрата нев'язки

$$\frac{\partial S^2}{\partial \Phi_k} = \sum_{m=1}^N [(H_{km} + H_{mk}^T) \Phi_m + i(-H_{km} + H_{mk}^T) \Psi_m]$$

$$\frac{\partial S^2}{\partial \Psi_k} = \sum_{m=1}^N [(H_{km} + H_{mk}^T) \Psi_m + i(-H_{km} + H_{mk}^T) \Phi_m]$$

Нехай  $A_{km} = \text{Re}(H_{km})$ ;  $B_{km} = \text{Im}(H_{km})$ .

Тоді вираз (8) для розв'язуючої системи можна записати

$$\begin{cases} \frac{\partial S^2}{\partial \Phi_k} = \sum_{m=1}^N [A_{km} \Phi_m + B_{km} \Psi_m] = 0 \\ \frac{\partial S^2}{\partial \Psi_k} = \sum_{m=1}^N [A_{km} \Phi_m - B_{km} \Psi_m] = 0 \end{cases}$$

або

$$\frac{\partial S^2}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^N (A_{ki} \Psi_m - B_{ki} \Phi) = 0,$$

де значень потенціалу (7) визначаються інтегруванням поточних умов (схема Лагранжа).

$$x_{(m)} = \begin{cases} \{\Phi, \Phi'\}, & \text{якщо у точці задано } \Psi_m \\ \{\Psi, \Psi'\}, & \text{якщо у точці задано } \Phi_m \end{cases}$$

### III. Комп'ютерна модель

Для розрахунку переміщення вільної поверхні за часом застосована змішана Ейлерово-Лагранжева схема [2]. На кожному кроці розраховуються комплексний потенціал і швидкості точок вільної поверхні за схемою Ейлера, положення вільної поверхні в наступний момент часу й зміна на ній



Рис. 4 Ейлерово-Лагранжева схема розв'язку.

$$\begin{cases} \frac{Dx}{Dt} = \frac{x^{n+1} - x^n}{\Delta t} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{Dy}{Dt} = \frac{y^{n+1} - y^n}{\Delta t} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{n+1} = x^n + \Delta t \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \\ y^{n+1} = y^n + \Delta t \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (9)$$

Метод реалізований у комп'ютерній програмі, верифікований на тестових прикладах, що мають аналітичний розв'язок [4,5]. Так похибка при розрахунку розподілу швидкостей у задачі "ударного" підйому напівциліндру у порівнянні з точним розв'язком складала менше за 1%. Проте у цій задачі жорсткий контур перетинає вільну поверхню рідини під кутом 90°, а найбільше нестійкість розв'язку у цій особливій точці проявляється коли кут прямує до нуля. Результати розрахунків розподілу швидкостей для занурення клину з кутом до горизонталі 20° показало гарну збіжність за аналітичним методом Вагнера.

### IV. Дослідження впливу "ефекту пам'яті" при розрахунку гідродинамічних навантажень

Розроблена комп'ютерна модель дозволила провести чисельні експерименти для досліджень впливу «ефекту пам'яті» при розрахунках гідродинамічних сил на корпус судна в часовій області.

На практиці при розрахунках хитавиці судна використовуються залежності, запропоновані Кумінсом [6]. Так кількість руху розраховується за формулою

$$F(t) = \frac{dI}{dt}$$

$$I(t) = -\tilde{m} \cdot V(t) - \int_0^t K(t-t)V(t)dt,$$

де  $\tilde{m}$  - приєднана маса рідини при коливанні контуру з нескінченно частотою;  $K(t)$  - гідродинамічна функція відгуку на одиничне імпульсне навантаження, яка й представляє «ефект пам'яті». Ця функція може бути обчислена за формулою:

$$K(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{N}{\omega} \sin \omega t d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty (m - \tilde{m}) \cos \omega t d\omega,$$

де  $m$  - приєднана маса;  $N$  - коефіцієнт демпфірування;  $\omega$  - частота коливань.

При нелінійних розрахунках також використовується формула Вагнера [7], де приймається, що приєднана маса змінюється залежно від глибини занурення контуру  $\bar{z}$

$$F(t) = -\rho \frac{D^2 \bar{z}}{Dt^2} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{D\bar{z}}{Dt} \right)^2.$$

Для оцінки області адекватності цих методів моделювання тестовий приклад – занурення клину (рис. 5).

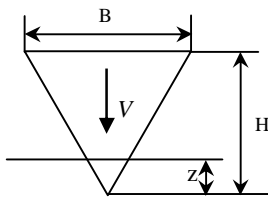


Рис. 5 Схема занурення клину.

На рис. 6 представлені графіки для занурення рівностороннього клина висотою  $B = H = 2$  зі швидкістю  $V = 5$  м/с, початкове занурення 0,5 м. Для даного прикладу, починаючи із занурення 2 метри через лінійні залежності для «ефекту пам'яті» його вплив значне перевищується, що дає неадекватний результат. Формула Вагнера дає близькі результати до 2,5 метрів. Далі результат розходиться у виді того, що не враховується підняття рівня вільної поверхні.

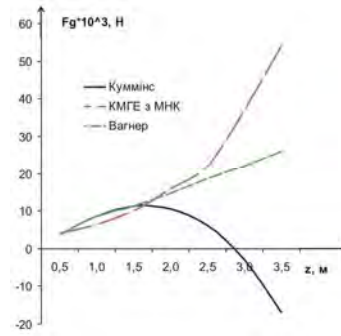


Рис. 6 Співставлення розрахунків гідродинамічних навантажень

## Висновок

Представлена у роботі комп'ютерна модель плоскої течії рідини з вільною поверхнею дозволила провести дослідження гідродинамічних навантажень на жорсткий контур, що рухається. Порівняння результатів моделювання з результатами аналітичних методів показало обмеженість застосування методів Куммінса й Вагнера.

## Література

- [1] Громадка П.Т., Лей Л., Комплексный метод граничных элементов в инженерных задачах. Пер. с англ. – М.: Мир, 1990 – 303 с.
- [2] Сулов С.В. Граничные элементы с непрерывными производными первого порядка для компьютерного моделирования движения жидкости. *Сб.наук.трудів УДМТУ* Миколаїв, 1998.
- [3] Сулов С.В. Використання комп'ютерного моделювання у дослідженнях гідродинамічних сил, що діють на корпус судна.. *Труди н.т. конференції МФ НАУКМА Миколаїв*, 2000.
- [4] Опанасенко В.А.. Комп'ютерне моделювання плоскої течії рідини з вільною поверхнею // *Зб.наук.праць НУК*. – Миколаїв: НУК, 2009. – №5 (428). – С. 70–77.
- [5] Опанасенко В. Розв'язання задачі занурення клину у рідину з вільною поверхнею за методом граничних елементів з найменшим квадратичним відхилом. *Матеріали 3-ї Міжнародної конференції молодих науковців CSE-2009* Львів.
- [6] Cummins W. The Impulse Response Function and Ship Motion : Technical Report / David Taylor Model Basin– DTNSRDC; N 1661. – Maryland, USA, 1962. – 9 p.
- [7] Wagner, H., *Über Stress-und Gleitvorgänge an der Oberfläche von Flüssigkeiten*, ZAMM, Vol. 12, No. 4, 1932