

О. Кузьмін<sup>1</sup>, А. Ковальчук<sup>2</sup>, Р. Ступень<sup>3</sup>

Національний університет “Львівська політехніка”,  
<sup>1</sup>кафедра менеджменту і міжнародного підприємництва,  
<sup>2</sup>кафедра інформаційних технологій видавничої справи,  
<sup>3</sup>кафедра менеджменту персоналу та адміністрування

## РОЗДІЛЕННЯ ТЕРИТОРІЇ НА ЕКОНОМІЧНІ СКЛАДОВІ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

© Кузьмін О., Ковальчук А., Ступень Р., 2012

**Запропоновано модель розподілу території на економічні зони з використанням методів теорії нечітких множин.**

**Ключові слова:** економічна зона, територія, нечітка множина, модель.

**Model of separation of territory on economic zones with by use of methods of the theory of fuzzy sets is offered.**

**Key words:** economic zone, area, fuzzy sets, model.

### Вступ

Мета роботи полягає в тому, щоб описати метод розділення на торговельні зони в нечітких умовах, коли інформація за своєю суттю неповна і рішення споживача про вибір не точний. Припущення про однорідність ринку послаблені, наскільки це можливо, з тим, щоб кількість аксіом під час побудови моделей була мінімальною. Основу методу дослідження становить теорія нечітких множин, яка оперує нечітким представленням нечітких понять. Хоча цю теорію вже застосовували в загальному аналізі поведінки людини та, зокрема, в аналізі просторової економічної активності, фундаментальне поняття розділення торговельних зон між фірмами детально не розглядали. Першою спробою такого роду було, очевидно, застосування нечітких кластерів для групування споживачів по фірмах\*.

### Моделі розділення на торговельні зони в нечітких умовах

Традиційні дослідження торговельної зони часто ґрунтуються на поняттях інформації та деяких припущеннях про однорідність ринку. Поведінкові постулати часто виявляються або занадто спрощеними або неузгодженими.

Такі припущення, як у разі постійності транспортних витрат і однакового рівня фірм, замінюються нечітким сприйняттям відстані і привабливості фірм відносно різних характерних властивостей. Перевага, яку віддають користувачі тій чи іншій фірмі, виявляється у вигляді випуклої нечіткої підмножини для дослідження перекриття торговельних зон. Встановлюється поріг розподілу. У цьому підході замість чітко окресленого опису торговельних зон у традиційному аналізі використовується ступінь розподілу. Побудовані дві моделі, підтвержені прикладами. У першій моделі передбачається, що різниця у відстані – це єдиний вирішальний фактор просторової переваги користувача, у той час як друга модель формулюється з використанням соціально-психологічних і економічних факторів, які впливають на прийняття користувачем рішення про поїздку.

**Модель 1** — розділення при лінійній моделі ринку. У моделі прийняті такі припущення:

- 1) існування ринку, що відповідає лінійній моделі;
- 2) довільний характер розподілу населення;
- 3) дві конкуруючі фірми  $F_1$  та  $F_2$  розміщуються в заданих точках відповідно  $a_1$  та  $a_2$ ;

\* *Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения / Пер. с англ.; Под ред. Р. Р. Ягера. – М.: Радио и связь, 1986.*

- 4) виробляється однорідний товар одного типу;
- 5) ціни однакові;
- 6) існує функція просторової переваги споживача, яка змінюється зворотно пропорційно до складності долання шляху до фірми.

**З а у в а ж е н н я.** Обговорюючи зроблені припущення, зазначимо дві особливості. Перша полягає в тому, що тут не приймається припущення про регулярний розподіл популяції. Розподіл на торговельні зони в цьому формулюванні залежить від виявленого споживачем ступеня переваги для фірм  $F_1$  та  $F_2$ .

Побудувавши нечітке поняття переваги, можемо визначити спосіб, за допомогою якого ринок можна розділити між фірмами. Оскільки нечіткі підмножини  $A_1$  та  $A_2$  обмежені максимальними ступенями  $\sup_x m_{A_1}(x)$  та  $\sup_x m_{A_2}(x)$  в точках  $a_1$  та  $a_2$  відповідно, то їх перетин  $A_1 \cap A_2$  також обмежений випуклою нечіткою підмножиною та визначається функцією належності

$$m_{A_1 \cap A_2}(x) = \begin{cases} e^{-k(x-a_2)^2} & \text{при } k \geq 1, x \leq g, \\ [e^{-k(x-a_1)^2}]^2 & \text{при } k \geq 1, x \geq g, \end{cases} \quad (1)$$

яка приймає максимальне значення  $\sup_x m_{A_1 \cap A_2}(x)$  в  $g$ . Використовуючи теорему про віддільність,

отримуємо, що найвищий ступінь розділення на торговельні зони, який дорівнює  $1 - \sup_x m_{A_1 \cap A_2}(x)$ ,

досягається в точці  $g$ , через яку проходить гіперплощина. У класичній моделі фірма монополізує ринок. Однак модель збуту з домінуванням більш адекватна для опису торговельних зон реального світу. Із цієї ідеї випливає, що перекриття торговельної зони скоріше загальний феномен, ніж виняток. Для перекриття торговельних зон фірм  $F_1$  та  $F_2$  можна використовувати поняття порогу роздільності. Поріг розділення  $l$  визначається умовою

$$l < \max_x \min[m_{A_1}(x), m_{A_2}(x)] = \sup_x m_{A_1 \cap A_2}(x). \quad (2)$$

Отже, для обраного порогу  $l$  торговельна зона  $M_i$  фірми  $F_i$ ,  $i=1, 2$  визначається нечіткою підмножиною рівня  $l$ . Вибираючи різні значення для  $l$ , можна отримати різні торговельні зони. Загальне правило полягає в тому, щоб вибрати найбільш можливе значення  $l$ , яке менше  $\max_x \min[m_{A_1}(x), m_{A_2}(x)]$ :

$$M_i = \left\{ x \mid m_{A_i}(x) \geq \max_x \min[m_{A_1}(x), m_{A_i}(x)] \right\} \text{ для всіх } x \in M_i. \quad (3)$$

Описану тут модель можна узагальнити на ринок з  $m$  конкуруючими фірмами  $F_1, F_2, \dots, F_m$ , які розміщені в ділянках з густотою населення відповідно  $a_1, a_2, \dots, a_m$ . Нехай  $A_1, A_2, \dots, A_m$  – обмежені випуклі нечіткі підмножини, які описують перевагу  $F_1$ , перевагу  $F_2$ , ..., перевагу  $F_m$  та визначаються функціями належності  $m_{A_1}, m_{A_2}, \dots, m_{A_m}$ . У зв'язку з випуклістю та обмеженості нечітких множин  $A_1, A_2, \dots, A_m$  нечіткі підмножини  $A_1 \zeta A_2, A_1 \zeta A_3, \dots, A_1 \zeta A_m, A_2 \zeta A_3, \dots, A_{m-1} \zeta A_m$  будуть також випуклими та обмеженими. Використовуючи вже згадану теорію про віддільність, за допомогою порогу розділення

$$l < \min_{ij} \max_x \min[m_{A_i}(x), m_{A_j}(x)] \quad (4)$$

можемо визначити торговельні зони відповідно  $M_1, M_2, \dots, M_m$ . Торговельна зона  $M_i$ ,  $i=1, 2, \dots, m$  буде знову нечіткою рівневою підмножиною, яка визначається відношенням

$$M_i = \left\{ x \mid m_{A_i}(x) \geq \min_{ij} \max_x \min[m_{A_i}(x), m_{A_j}(x)] \right\} \text{ для всіх } x \in M_i. \quad (5)$$

**Модель 2** – загальна модель розділення торговельної зони. У моделі прийняті такі припущення:

- 1) існування ринку;
- 2) довільна схема розселення населення;

- 3) розміщення  $m$  конкуруючих фірм  $F_1, F_2, \dots, F_m$  в певних пунктах;
- 4) продукція одної якості;
- 5) фірми характеризуються  $p$  ознаками;
- 6) ступені важливості ознак при прийнятті рішення про поїздку змінюються між індивідуумами;
- 7) одна фірма переважає над іншою, якщо її ознаки за своїм ступенем важливості ближчі до оцінки споживача.

Нехай  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  – множина покупців, а  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_p\}$  – множина ознак фірми і  $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_m\}$  – множина фірм.

Нехай  $\Phi_R: X \times Y \rightarrow [0,1]$  є функцією належності нечіткого бінарного відношення  $R$ . Для всіх  $x \in X$  та всіх  $y \in Y$  функція  $\Phi_R(x,y)$  – ступінь важливості ознаки  $y$  за оцінкою індивідууму  $x$  при визначенні ним переваги фірми. Відношення  $R$  можна подати в матричній формі:

$$R = \begin{matrix} & y_1 & y_2 & \dots & y_p \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{matrix} & \left[ \begin{array}{cccc} \Phi_R(x_1, y_1) & \Phi_R(x_1, y_2) & \dots & \Phi_R(x_1, y_p) \\ \Phi_R(x_2, y_1) & \Phi_R(x_2, y_2) & \dots & \Phi_R(x_2, y_p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Phi_R(x_n, y_1) & \Phi_R(x_n, y_2) & \dots & \Phi_R(x_n, y_p) \end{array} \right] \end{matrix}$$

Нехай  $\pi: Y \times Z \rightarrow [0,1]$  є функцією належності нечіткого бінарного відношення  $S$ . Для всіх  $y \in Y$  та всіх  $z \in Z$   $\pi_S(y,z)$  – ступеню належності або сумісності фірми  $z$  з ознакою  $y$ . У матричній формі відношення має вигляд:

$$S = \begin{matrix} & z_1 & z_2 & \dots & z_m \\ \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_p \end{matrix} & \left[ \begin{array}{cccc} \pi_S(y_1, z_1) & \pi_S(y_1, z_2) & \dots & \pi_S(y_1, z_m) \\ \pi_S(y_2, z_1) & \pi_S(y_2, z_2) & \dots & \pi_S(y_2, z_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi_S(y_p, z_1) & \pi_S(y_p, z_2) & \dots & \pi_S(y_p, z_m) \end{array} \right] \end{matrix}$$

Тепер можна отримати матрицю  $T$ :

$$T = \begin{matrix} & z_1 & z_2 & \dots & z_m \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{matrix} & \left[ \begin{array}{cccc} m_{A_1}(x_1, z_1) & m_{A_2}(x_1, z_2) & \dots & m_{A_m}(x_1, z_m) \\ m_{A_1}(x_2, z_1) & m_{A_2}(x_2, z_2) & \dots & m_{A_m}(x_2, z_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{A_1}(x_n, z_1) & m_{A_2}(x_n, z_2) & \dots & m_{A_m}(x_n, z_m) \end{array} \right] \end{matrix},$$

елементи якої визначаються функцією належності

$$m_{A_i}(x, z_i) = \frac{\sum_y \Phi_R(x, y) \cdot \pi_S(y, z_i)}{\sum_y \Phi_R(x, y)} \quad \text{для всіх } x \in X, y \in Y \text{ та } z \in Z \quad (6)$$

Сума  $\sum_y \Phi_R(x, y)$  дорівнює ступеню нечіткої підмножини, що вказує на кількість найважливіших ознак  $y$ , які споживач  $x$  використовує для оцінки фірми, а  $m_{A_i}(x, z_i)$  інтерпретувати як виважений ступінь переваги фірми  $z_i$  індивідуумом  $x$ . Функція переваги, яка описана рівнянням (6), задовольняє визначення випуклої нечіткої підмножини

$$m_{A_i} [I(x_1, z_i) + (1 - I)(x_2, z_i)] \geq \min[m_{A_i}(x_1, z_i), m_{A_i}(x_2, z_i)] \forall x_1, \forall x_2, \forall z_i \in Z, \forall I \in [0, 1]. \quad (7)$$

Оскільки всі  $m_{A_i}(x, z_i)$  випуклі, їх перетини також випуклі функції. Отже, можна побудувати матрицю  $W$ :

$$W = \begin{bmatrix} m_{A_1}(x_1, z_1) \dot{\cup} m_{A_2}(x_1, z_2) & \dots & m_{A_{m-1}}(x_1, z_{m-1}) \dot{\cup} m_{A_m}(x_1, z_m) \\ m_{A_1}(x_2, z_1) \dot{\cup} m_{A_2}(x_2, z_2) & \dots & m_{A_{m-1}}(x_2, z_{m-1}) \dot{\cup} m_{A_m}(x_2, z_m) \\ m_{A_1}(x_n, z_1) \dot{\cup} m_{A_2}(x_n, z_2) & \dots & m_{A_{m-1}}(x_n, z_{m-1}) \dot{\cup} m_{A_m}(x_n, z_m) \end{bmatrix}$$

З тих самих міркувань, які були наведені в лінійній моделі розділення ринку, у цій моделі поріг розділення торговельної зони може бути обмежений умовою

$$l < \min_{ij} \max_x \min[m_{A_i}(x, z_j)]. \quad (8)$$

Якщо поріг  $l$  вибраний, то торговельна зона  $M_i$ ,  $i=1, 2, \dots, m$  описується рівневою множиною

$$M_i = \{x | m_{A_i}(x) \geq \min_{ij} \max_x \min[m_{A_i}(x, z_j), m_{A_j}(x, z_j)]\} \text{ для всіх } x \in M_i. \quad (9)$$

Для ілюстрації практичного використання описаних теоретичних результатів про задачу розділення торговельної зони розглянемо приклад.

Нехай  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{12}\}$  – множина покупців, а  $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$  – множина ознак фірми і  $Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$  – множина фірм. При значеннях елементів матриць  $R$  і  $S$ , наведених нижче, територія розподіляється на зони  $M_1, M_2, M_3, M_4$ , що графічно показано на рис. 1.

$$R = \begin{bmatrix} 1 ; 0 ; 0 ; 0 \\ 0 ; 1 ; 0 ; 0 \\ 0 ; 0 ; 1 ; 0 \\ 0 ; 0 ; 0 ; 1 \\ 1 ; 1 ; 1 ; 1 \\ 0.8 ; 0.4 ; 0.5 ; 0.9 \\ 0.7 ; 0.3 ; 0.4 ; 0.8 \\ 0.5 ; 0.8 ; 0.8 ; 0.2 \\ 0.5 ; 0.5 ; 0.5 ; 0.5 \\ 0.6 ; 0.7 ; 0.8 ; 0.5 \\ 0.1 ; 0.1 ; 0.1 ; 0.1 \\ 0 ; 0 ; 1 ; 1 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0.9; 0.1; 0.5; 0.7 \\ 0.5; 0.9; 0.6; 0.6 \\ 0.4; 0.9; 0.5; 0.4 \\ 0.8; 0.1; 0.5; 0.6 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = \{x_1, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}\},$$

$$M_2 = \{x_2, x_3, x_8, x_{10}\},$$

$$M_3 = \{x_2, x_8, x_{10}\},$$

$$M_4 = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}\}.$$

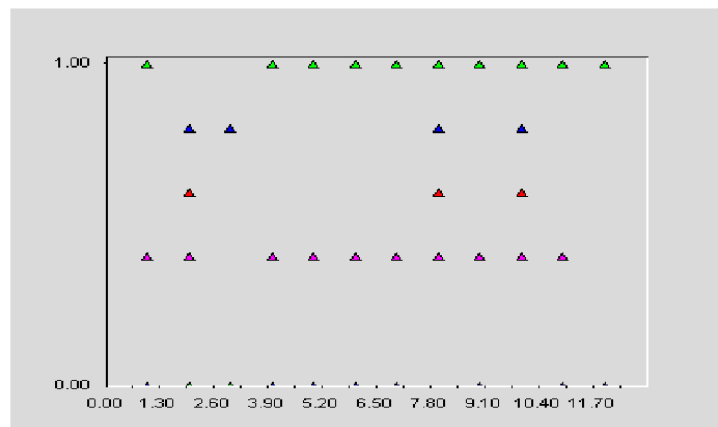


Рис. 1. Графічне зображення зон, на які розподіляють територію

Якщо матриці  $R$  і  $S$  мають вигляд

$$R = \begin{bmatrix} 1; 0; 0; 0 \\ 0; 1; 0; 0 \\ 0; 0; 1; 0 \\ 0; 0; 0; 1 \\ 1; 1; 1; 1 \\ 0.8; 0.4; 0.5; 0.9 \\ 0.7; 0.3; 0.4; 0.8 \\ 0.5; 0.8; 0.8; 0.2 \\ 0.5; 0.5; 0.5; 0.5 \\ 0.6; 0.3; 0.3; 0.5 \\ 0.1; 0.1; 0.1; 0.1 \\ 0; 0; 1; 1 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0.9; 0.1; 0.5; 0.7 \\ 0.5; 0.9; 0.6; 0.6 \\ 0.4; 0.1; 0.5; 0.4 \\ 0.8; 0.1; 0.5; 0.6 \end{bmatrix}$$

територія розподіляється на зони  $M_1, M_2, M_3, M_4$

$$M_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}\},$$

$$M_2 = \{x_2\},$$

$$M_3 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}\},$$

$$M_4 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}\},$$

що графічно показано на рис.2.

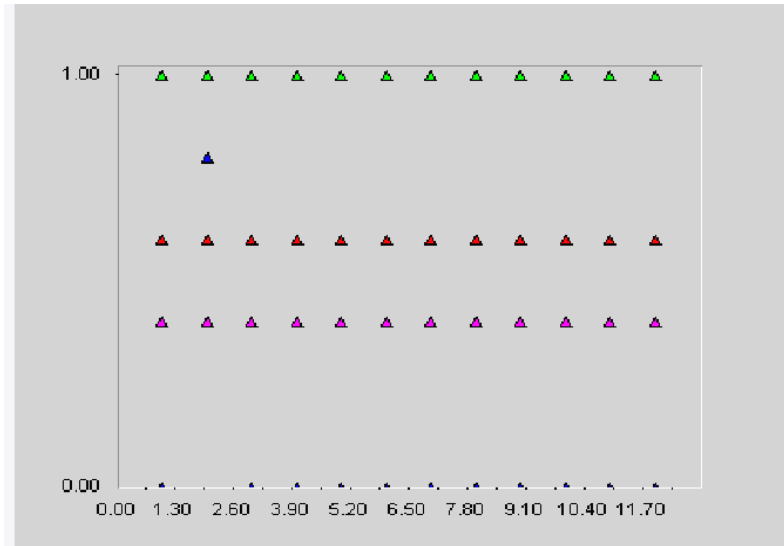


Рис. 2. Графічне зображення зон

### Висновки

У розглянутих прикладах показано можливість застосування описаної моделі в розподілі території на економічні зони. Запропонована модель може бути застосовна під час планування економічних експериментів в конкурентній боротьбі між фірмами.