Description of Some Random Variables Statistical Distribution Laws used in Construction Reliability Calculating

Zinoviy Blikharskyy[1], Roman Khmil[2], Yevhen Tsarioff[3], Vasyl Popovych[4]

Department is the Build constructions and bridges,
Lviv Polytechnic National University,
UKRAINE, Lviv, St. Bandera St, 12,
E-mail: [1]blikharskyy@ukr.net
[2]roman_hl@ukr.net
[3]tsarioff@rambler.ru
[4]vpopovych@ukr.net

This article is devoted to the description of statistical laws of distribution of casual sizes which are used in the calculation of reliability of building constructions.

The interdependence of laws of distribution with reliability of building constructions, as well as their place in the theory of reliability is shown.

Mathematical maintenance of statistical laws of distribution is highlighted and described by graphic dependences; the content of some statistical laws of distribution, which are separate cases of that or other mathematical function of distribution, is presented.

In the basis of normal and logarithmic normal laws of distribution there is put the dependence of strength characteristics of building materials (concrete, armature) with the amount of the researched samples. The exponential law of distribution is used for the description of distribution of constructions refuses in the theory of reliability of building constructions. The distribution which is described by the Gram-Charlier series is applied at appearance of "tails of distribution", which are often met in diagrams which are built on experimental researches of durability of building materials or constructions. Widespread in the tasks of reliability is the fact that what is considered maximum for minimum values well describes the fragile destruction and serves as the basis for the corresponding approach to the tasks of reliability of building constructions. For description of distributions of the temporal loading, in particular - snow, very often there is used the double exponential Gumbel distribution (distribution of extreme values). The peculiarity of application of this distribution is the possibility to foresee the loading in time.

The functions of statistical laws of distribution of casual sizes, used in the calculation of reliability of building constructions, are given.

The scientific literature, directly connected with the subject of reliability of building constructions, is analysed.

Опис деяких статистичних законів розподілу випадкових величин, що застосовуються в розрахунку надійності конструкцій

Зіновій Бліхарський[1], Роман Хміль[2], Євген Царьов[3], Василь Попович[4]

Кафедра будівельних конструкцій та мостів,
Національний університет “Львівська політехніка”,
УКРАЇНА, м. Львів, вул. С. Бандери, 12,
E-mail: [1] blikharskyy@ukr.net
[2]roman_hl@ukr.net
[3]tsarioff@rambler.ru
[4]vpopovych@ukr.net

У даній статті описуються деякі статистичні закони розподілу випадкових величин, які використовуються в розрахунку надійності конструкцій.

Проаналізовано суть законів, їх зв'язок із прикладним застосуванням у проектуванні. Наведено графіки статистичних законів розподілу та функцій, що їх описують. Проаналізовано наявну літературу по даній тематиці.

Ключові слова – закон розподілу, надійність, функція, випадкові величини.

I. Вступ

Необхідність забезпечення високого рівня надійності будівель та споруд пов’язана з тим, що їх вихід з ладу в процесі експлуатації супроводжуються великими економічними втратами, пов’язаними із простоями, ремонтами, матеріальними та трудовими збитками. Більше того, на таких небезпечних виробництвах як, наприклад, АЕС, газопроводи, шахти, хімічні та металургійні підприємства, транспорт і т.д. може привести до катастроф із людськими жертвами і небезпечними екологічними наслідками. Додаткову гостроту вказана проблема набуває в умовах ринкової економіки, коли показники надійності і довговічності будівельної продукції можуть вирішально впливати на результат конкурентної боротьби [1].

В загальному, надійність визначається, як властивість технічного об’єкта зберігати в часі, у встановлених межах значення всіх параметрів, які характеризують його здатність виконувати необхідні функції при заданих умовах застосування, технічного обслуговування, зберігання і транспортування. Іншими словами, надійність – це якість, розгорнута в часі. Як комплексна властивість технічного об’єкта, надійність включає в себе наступні компоненти: безвідмовність, довговічність, ремонтопридатність [1].

Проблема надійності конструкцій є складовою частиною науки про будівельні конструкції, яка об’єднує питання розрахунку, проектування, будівництва і експлуатації конструкцій будівель та споруд. Математичною основою, на якій побудована теорія надійності, є саме статистичні закони та функції розподілу випадкових величин.

II. Виклад основного матеріалу

Закономірності, які спостерігаються у масових випадкових явищах зі збільшенням кількості статистичного матеріалу, проявляються все точніше і чіткіше. При обробці статистичних даних часто виникає питання про визначення законів розподілу тих чи інших випадкових величин. Теоретично, при достатній кількості подій, властиві цим випадковим величинам, закономірності будуть втілюватись якнайточніше. На практиці часто зустрічаємося з обмеженою кількістю експериментальних даних, у зв'язку з цим результати наших спостережень і їх обробка завжди мають більший чи менший елемент випадковості. Виникає питання про те, які риси спостережуваного явища відносяться до постійних, стійких і в дійсності характерним йому, а які є випадковими і проявляються в даній серії спостережень тільки за рахунок обмеженого об'єму експериментальних даних [2].

Деякі розподіли ймовірностей неперервних величин мають особливе значення в теорії надійності несучих конструкцій [3].

Нормальний розподіл. Більшість задач можуть вирішуватись достатньо просто, якщо змінні мають нормальний розподіл, а рівняння граничних станів є лінійними функціями цих змінних. У природі і техніці часто спостерігаються випадкові величини, що підчиняються нормальному закону чи йому подібному [3, 4]. Розповсюдженість нормального закону в задачах надійності пов’язана з його відносною аналітичною простотою і присутністю готових таблиць, близьких відповідним розподілам міцності матеріалів і деяких навантажень, що асимптотично наближаються до нормального розподілу суми кількох випадкових величин з різними законами розподілу. Цей розподіл найбільш часто використовується для опису розподілів міцності будівельних матеріалів та конструкцій [1, 5] (див. рис. 1, 2). Поясненням цьому служить центральна гранична теорема: "Якщо випадкова величина утворена, як сума великого числа взаємозалежних випадкових складових, вклад кожного з яких в суму малий, то ця випадкова величина може бути представлена у вигляді нормального розподілу" [3].

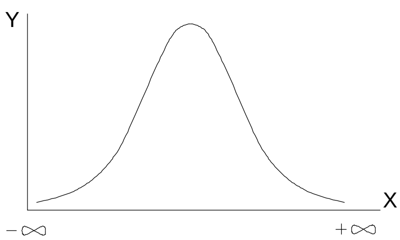

Рис. 1. Графічний опис нормального розподілу

Вид функції розподілу:

$$y = \frac{1}{s \cdot \sqrt{2 \cdot p}} \cdot \exp\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{2 \cdot s^2}\right],$$

x – випадкова величина; $\bar{x}$ - математичне очікування випадкової величини; σ - середнє квадратичне відхилення випадкової величини;

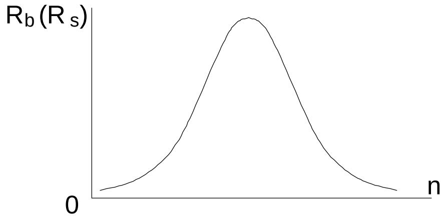

Рис. 2. Фізичний зміст нормального розподілу

R_b – міцність бетону;

R_s – міцність арматури;

n – кількість досліджуваних зразків

Логарифмічно нормальний розподіл. Використання нормального розподілу не завжди коректне навіть для опису міцності. Наприклад, у випадку опису розподілу міцності керамзитобетону з невеликою міцністю, теоретично, з великою ймовірністю слід очікувати появу міцності зі знаком мінус, що є неможливим. Тому в таких випадках доцільно застосовувати логарифмічно нормальний розподіл, який виключає описане вище (див. рис. 3, 4) [5]. Із центральної граничної теореми випливає - «випадкова величина X має логнормальний розподіл, якщо вона може бути представлена результатом великої кількості незалежних випадкових величин X_i» [3, 6].

Вид функції розподілу:

$$y = \frac{1}{x \cdot a \cdot \sqrt{2 \cdot p}} \cdot \exp\left[-\frac{(\ln(x_i)-b)^2}{2 \cdot a^2}\right],$$

$$де\ a^2 = \ln\left[\frac{s^2}{\bar{x}^2}+1\right],\ b = \ln\frac{\bar{x}}{\sqrt{\exp\left[\ln(s^2/x^2)+1\right]}},$$

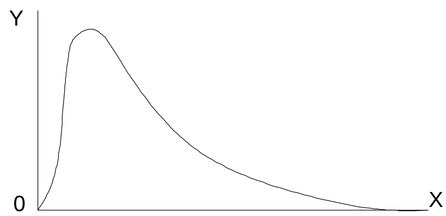

Рис. 3. Графічний опис логарифмічно нормального розподілу

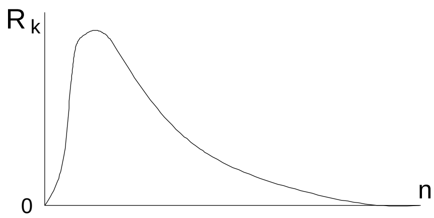

Рис. 4. Фізичний зміст логнормального розподілу

R_k – міцність керамзитобетону.

Розподіл Вейбулла. Широко розповсюдженим в задачах надійності є також розподіл Вейбулла, що є граничним для мінімальних значень, добре описує крихке руйнування і служить основою відповідного підходу до задач надійності [7] .

Розподіл має наступну функцію розподілу:

$$y=\frac{b}{a}\cdot(x-g)^{b-1}\cdot\exp[-\frac{(x-g)^{b}}{a}],$$

де g - параметр положення розподілу; зазвичай $g=0$, тоді розподіл можливий тільки при $x\le 0$;

$a>0$ - параметр масштабу, що визначає витягнутість розподілу;

$b>0$ - параметр форми, від якого залежить вид розподілу (рис. 5-7); при $b=1$ розподіл Вейбулла перетворюється в експоненціальний розподіл, при $b=2$ - в розподіл Релея.

Для підбору цього розподілу методом моментів потрібно оперувати двома першими моментами, з використанням яких вирішується трансцендентне рівняння, яке включає гамма-функцію; можна також виконати підбір по вихідній вибірці [1, 8].

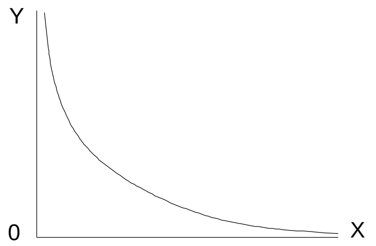

Рис.5. Графічний опис розподілу Вейбулла при $g=0$ *і* $0<b<1$.

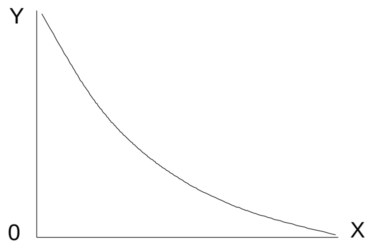

Рис.6. Графічний опис розподілу Вейбулла при $g=0$ *і* $b=1$.

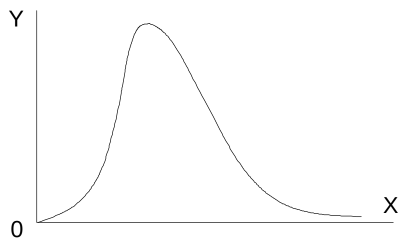

Рис.7. Графічний опис розподілу Вейбулла при $g=0$ *і* $b>1$.

Експоненціальний закон розподілу. Для опису розподілу відмов конструкцій в теорії надійності часто використовують експоненціальний розподіл (див. рис. 8, 9).

Вид функції розподілу: $y=\frac{1}{\bar{x}}\cdot\exp\left(-\frac{x}{\bar{x}}\right)$,

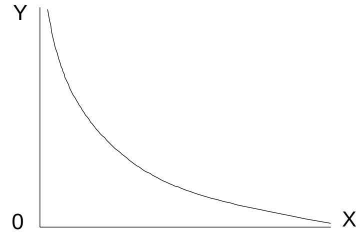

Рис. 8. Графічний опис експоненціального закону розподілу

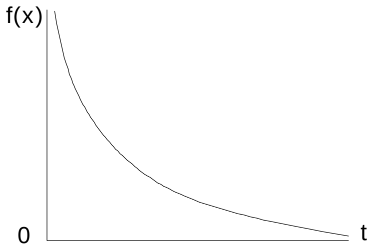

Рис. 9. Фізичний зміст експоненціального закону розподілу

$f(x)-$функція, що описує надійність конструкції в часі;

$t-$час експлуатації конструкції.

Розподіл, що описується рядом Грам-Шарльє. Числові значення міцності будівельних матеріалів і навантажень, що входять в детерміновані розрахунки, зазвичай відстають від своїх середніх значень (в статистичному значенні). Ці області розподілу називають «хвостами розподілу». Існує думка, що на хвостах розподілу порушуються статистичні закономірності. В такому випадку можна говорити про появу «викидів». Для усунення невідповідності між експериментальними даними і законом розподілу можна використати ряд Грам-Шарльє. Розподіл, що описується цим рядом, враховує присутність «викидів» у фактичному розподілі (див. рис. 10) [3].

Вид функції розподілу:

$$y=f(x)\cdot\left[E\cdot x^{4}+A\cdot x^{3}-6\cdot E\cdot x^{2}-3\cdot A\cdot x+3\cdot E+1\right],$$

$$A=\frac{m_3}{6\cdot s^{3}};E=\frac{1}{24\cdot s^{4}}\cdot(m_4-3\cdot s^{4});$$

де *f(x)* – функція нормального розподілу;

$m_{3,4}$- відповідно третій і четвертий центральні моменти випадкових величин.

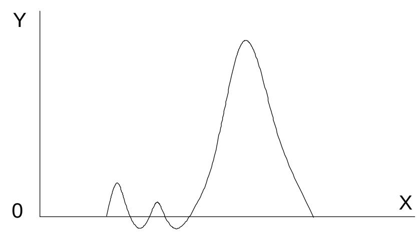

Рис.10. Графічний опис розподілу, що описується рядом Грам-Шарльє

Однак, використовувати даний розподіл потрібно обережно, оскільки інколи значення функції може бути від'ємним, що є неможливим (ймовірність не може бути від'ємною). Одним із переваг цього розподілу є його безмежні границі.

Розподіл Гумбеля (подвійний експоненціальний розподіл). Для опису розподілів тимчасових навантажень, зокрема – снігових, дуже часто використовують подвійний експоненціальний розподіл Гумбеля (розподіл екстремальних значень) (див. рис. 11). Особливість застосування цього розподілу – можливість прогнозування навантажень в часі [1].

Вид функції розподілу:

$$f(x) = a_n \cdot \exp\left(-y - e^{-y}\right),$$

де $y = a_n(x - u_n)$ - нормоване ухилення випадкової величини від моди; $u_n = \overline{x_n} - 0.45005 s_n$ - характеритичний екстремум; $a_n = p/(\sqrt{6} s_n)$ - екстремальна інтенсивність; $\overline{x_n}, s_n$ - відповідно вибіркові марематичне очікування та середнє квадратичне відхилення випадкової величини сукупності із n членів.

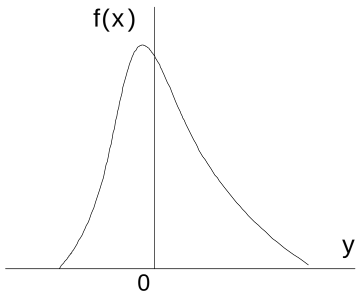

Рис. 11. Графічний опис подвійного експоненціального розподілу Гумбеля

Достатньо широко в задачах надійності застосовуються криві Пірсона, особливо III типу (гамма-розподіл) [9, 10].

Для практичного вирішення конкретних питань корисними будуть розподіл Крицького-Менкеля, [11] отриманий степеневим перетворенням кривої Пірсона III типу, розподіл Гриневича на основі закону Вейбула [1, 12], лінійні комбінації нормальних [13], вейбулівських та інших законів.

Висновок

Описано та розкрито зміст і характер деяких прикладних статистичних законів розподілу випадкових величин, які використовуються в теорії надійності будівельних конструкцій. Наведено графіки та функції статистичних законів розподілу випадкових величин, які часто використовуються в розрахунку надійності будівельних конструкцій.

Література

[1] Пичугин С.Ф. Надежность стальных конструкций производственных зданий: монография. – Полтава: ООО «Асми», 2009. – 452 с.

[2] Вентцель Е.С. Теория вероятнистей. - М., «Наука», 1969. – 576 с.

[3] Шпете Г. Надежность несущих строительных конструкций / Пер. с нем. О.О. Андреева.- М.: Стройиздат, 1994. – 288 с.

[4] Смирнов И.В., Дунин-Барковский И.В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. – М., Наука, 1969. – 512 с.

[5] Лычев А.С. Надежность строительных конструкций: учебное пособие. — Москва : АСВ, 2008. — 184 с.

[6] Королюк В.С. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. – М., Наука, 1985. – 640 с.

[7] Болотин В.В. Статистические методы в строительной механике. – 2-е изд. – М.: Стройиздат, 1965. – 279с.

[8] Райзер В.Д., Кириллов Б.Б. Расчет надежности трехслойных панелей // Строительная механика и расчет сооружений. – 1991. - №6,- С.79-85.

[9] Кендалл М.Дж., Стьюарт А. Теория распределений. – М.:Наука, 1966.-588с.

[10] Справочник по надежности, в 3 томах. – М.: Мир,1969.

[11] Мюллер Р.К. К вопросу определения коэфициента однородности и перегрузки по статистическим данным // Вопросы безопасности и прочности строительных конструкций / ЦНИПС. – М.: Стройиздат, 1952. – С.88-118.

[12] Гарцман Л.Б. Вероятности гололедно-ветровых и температурных воздействий на ЛЭП. – Л.: Гидрометеоиздат, 1987. – 199 с.

[13] Федоров Д.И., Бондарович Б.А., Перепонов В.И. Надежность металлоконструкций землеройных машин. – М.:Машиностроение, 1971. – 216с.