УДК 51.001.57.

А.В. ЧАБАН

Національний університет "Львівська політехніка"

ОДЕРЖАННЯ РІВНЯННЯ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ПРУЖНОГО ІЗОТРОПНОГО СЕРЕДОВИЩА НА ОСНОВІ ПРИНЦИПУ ГАМІЛЬТОНА–ОСТРОГРАДСЬКОГО З УРАХУВАННЯМ ДИСИПАЦІЇ

Запропоновано метод побудови рівняння вільних коливань пружного ізотропного середовища на підставі принципу Гамільтона–Остроградського з урахуванням дисипації. Для цього поширено згаданий принцип на реальні неконсервативні системи шляхом побудови неконсервативного лагранжіана.

The method of construction of free vibrations of resilient homogeneous isotropic environment is offered on the basis of the Gamyt'ton-Ostrogradskyj principle taking into account dissipation. For this purpose it is necessary to modify the known function Lagrangia by addition to her of function of internal dissipation of mechanical energy.

Вступ. Інтегральний варіаційний принцип Гамільтона–Остроградського є одним з найосновніших принципів сучасної прикладної фізики. На підставі принципу найменшої дії можливе одержання математичної інтерпретації багатьох законів прикладної фізики, які належать не тільки до аналітичної механіки й теорії пружності, а й до багатьох інших наук.

У цій роботі пропонується поширити принцип Гамільтона–Остроградського з консервативних систем, які характеризують коливання ізотропного середовища, що рухаються під дією потенціальних сил, на неконсервативні системи, що рухаються під дією і потенціальних сил, і сил внутрішньої дисипації. Таке припущення потребує істотно модифікувати відому функцію Лаґранжа уведенням в неї внутрішньої дисипації механічної енергії. Модифікація консервативного лагранжіана здійснена на підставі відомої праці американських вчених Вайта і Вудсона [1].

Мета роботи. На підставі запропонованого неконсервативного лагранжіана, що входить до інтегрального варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського, одержати диференціальне рівняння коливань пружного ізотропного середовища, яке враховує дисипацію внутрішньої енергії в системі.

Аналіз останніх досліджень. Варіаційні принципи, на підставі яких одержують рівняння коливань ізотропного середовища, застосовуються для консервативних систем, що, безперечно, не завжди відповідає реальним постановкам задачі. Адже для практичної більшості прикладних задач очевидна дія узагальнених сил внутрішньої дисипації. Інтегральний варіаційний принцип Гамільтона–Остроградського доволі широко застосовують для аналізу коливань пружних середовищ без урахування дисипації [2, 3].

Теоретичні засади. На дисипативні властивості пружного середовища впливають як гістерезисні процеси, зумовлені нелінійним характером залежності $\sigma = \sigma(\varepsilon)$, так і втрати на тертя між спряженими елементарними об'ємами пружного середовища, пов'язані з неоднорідністю матеріалу [4]. За циклічної деформації пружного середовища згадана залежність утворює гістерезисну петлю, причому площа цієї петлі пропорційна до втрат механічної енергії (втрати на незворотне поглинання) [4]. Аналогічна картина відбувається в електричних та магнітних полях, які описуються рівняннями електродинаміки [5]. Так, втрати електромагнітної енергії у феромагнетиках ділять на втрати на вихрові струми та на гістерезис. Для реальних електротехнічних та електромеханічних пристроїв втрати на вихрові струми є доволі істотними і боротьба за зменшення цих втрат здійснюється завдяки ламінуванню магнітопроводу та збільшенню його питомого опору (трансформатори, електричні машини тощо). Втрати ж на гістерезис зменшують введенням в метал спеціальних домішок, змінюючи тим самим структуру матеріалу магнітопроводу. Для побудови реальних математичних моделей електротехнічних пристроїв використовують так звану основну криву намагнічення, яка у першому наближенні відтворює нелінійні процеси в магнітопроводі, пов'язані з гістерезисними ефектами. Та в багатьох випадках, особливо для моделей трансформаторів та асинхронних моторів, достатньо користуватись лінійним варіантом згаданої кривої [6] – таке припущення дає змогу одержати прийнятні результати.

Під час експлуатації трансформатора без ламінування магнітопроводу (навіть за умови лінійної характеристики намагнічення сталі) втрати на вихрові струми будуть настільки істотними, що трансформатор не зможе працювати (бо вихрові струми ще й розмагнічуватимуть магнітопровід). Отже, можна стверджувати, що втрати на гістерезис та на вихрові струми не пов'язані між собою. Подібна картина відбувається і в механічних полях [4, 5].

Ми пропонуємо метод врахування дисипативних втрат енергії за умови лінійної залежності між напруженням та деформацією. Адже для більшості задач прикладної механіки та електромеханіки згадану залежність можна вважати як таку, що показана у вигляді закону Гука (площа гістерезисної петлі буде доволі малою, наприклад пружини, торсіони, пружні муфти тощо) (для феромагнетиків – це магнітом'які матеріали). За таких припущень можна вважати, що основні втрати механічної енергії в пружному середовищі будуть зумовлені тертям суміжних елементарних об'ємів пружного середовища, які виникають із-за неоднорідності матеріалу [4]. Втрати ж на гістерезис будуть величинами вищого порядку малості. Безперечно такий підхід не відповідає фундаментальним засадам теорії пружності. Але для побудови математичних моделей електромеханічних пристроїв згадані вище припущення дають прийнятні результати.

Запишемо закон Гука для будь-якого елемента пружного матеріалу [5]:

$$\sigma_{i,j} = \sum_{k,l=1}^{3} C_{i,j,k,l}\varepsilon_{k,l} \qquad (i, j = 1,2,3)\,, \tag{1}$$

де $\sigma_{i,j}$ – компоненти тензора напруження; $\varepsilon_{k,l}$ – компоненти тензора деформації. Згаданий закон стверджує, що кожна компонента тензора напруження лінійно пов'язана з кожною компонентою тензора деформації. Очевидно, що для повного описання пружних властивостей середовища необхідно $9\times 9 = 81$ можливий коефіцієнт. Коефіцієнти $C_{i,j,k,l}$ утворюють тензор четвертого рангу, який називається тензором пружності. За умови однорідності матеріалу його компоненти будуть сталими числами.

Зробивши припущення, що кристалічна ґратка досліджуваної системи є кубічної форми, коефіцієнти тензора пружності приймають лише три ненульові форми, а зробивши подальші припущення щодо ізотропності матеріалу, для однозначного опису пружних властивостей середовища достатньо два різних постійних коефіцієнти типу $C_{x,x,y,y} = \lambda$; $C_{x,y,x,y} = 2\mu$; $C_{x,x,x,x} = \lambda + 2\mu$, де λ, μ – пружні коефіцієнти Ламе. Усі інші можливі комбінації елементів тензора, коли сума однакових індексів є непарною типу $C_{x,x,x,y}$ тощо перетворюються, на підставі закону збереження енергії, в тотожний нуль [5].

Вільні коливання пружного середовища описуються векторною функцією. Нехай x_1, x_2, x_3 – декартові координати. Тоді функція узагальнених координат $\mathbf{q} \equiv \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t)$ – вектор-зміщення пружного середовища. Запишемо вираз компонент тензора деформації цього поля [5, 7]:

$$\varepsilon_{i,j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \tag{2}$$

Для ізотропного середовища за малих деформацій компоненти тензора напруження на підставі (1) істотно спрощуються й виглядають так [7]:

$$\sigma_{i,j} = \lambda \varepsilon_{rr} \delta_{i,j} + 2\mu \varepsilon_{i,j}, \tag{3}$$

де $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера (елементи одиничного тензора); $\varepsilon_{rr} = \nabla \cdot \mathbf{u}$.

Запишемо функціонал дії за Гамільтоном–Остроградським для голономних систем із зосередженими параметрами [5, 7]:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L^* dt, \quad L^* = T^* - P^*, \tag{4}$$

де S – дія за Гамільтоном; L^* – функція Лаґранжа; T^*, P^* – кінетична та потенціальна енергії системи відповідно.

Запишемо модифіковану функцію Лагранжа [8]:

$$L^* = T^* - P^* + \Phi^* - D^*; \quad \Phi^* = \int_0^t \Phi_p^* \Big|_{t=\tau} d\tau \ , \tag{5}$$

де Φ^* – функція дисипації енергії; Φ_p^* – дисипативна функція (квадратична форма часових та просторово-часових похідних від функції узагальнених координат); D^* – енергія активних та пасивних сил непотенціального характеру, що діють на систему ззовні; τ – додаткова змінна інтегрування.

Запишемо функціонал дії за Гамільтоном–Остроградським для систем з розподіленими параметрами, а також умову його стаціонарного значення [5, 7]:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \int_V L dV dt; \quad \delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_V L dV dt = 0, \tag{6}$$

де V – область інтегрування (об’єм).

Тепер функція Лагранжа L матиме розмірність енергії, поділеної на об’єм (густина енергії).

Принцип Гамільтона–Остроградського стверджує, що: “З усієї множини віртуальних рухів голономної системи лише для реального руху функціонал дії за Гамільтоном–Остроградським одержує стаціонарне значення”. Якщо система характеризується мінімальними енергетичними затратами, то вона здійснює реальний рух (це випливає з принципу Мопертюї) і функціонал енергії цієї системи (внутрішній інтеграл у (3)) одержує стаціонарне значення. Тобто, якщо функціонал енергії отримує стаціонарне значення, то й функціонал дії за Гамільтоном–Остроградським також отримує стаціонарне значення.

Запишемо функціонал енергії та умову його стаціонарності:

$$I = \int_V L dV, \quad \delta I = \delta \int_V L dV = 0. \qquad . \tag{7}$$

За умови змінного об’єму пружного середовища застосування принципу Гамільтона–Остроградського у звиклий спосіб є неправомірним, адже функціонал дії вироджується у функцію – інтеграл із змінною межею інтегрування (стосовно функціонала область інтегрування завжди незмінна в просторі й часі). Для вирішення цієї проблеми поступимо так. Пружно зафіксуємо середовище з коефіцієнтом пружності $c_0(x, y, z)$ та коефіцієнтом дисипації $\nu_0(x, y, z)$, прийнявши до уваги, що зміна розмірів об’єкта під час коливань є малою порівняно з його геометричними розмірами в стані спокою. Тоді до функціоналів потенціальної енергії та функції внутрішньої дисипації системи додамо рівняння інтегрального зв’язку. Такий підхід дає змогу застосувати для одержання рівняння вільних коливань пружного однорідного ізотропного середовища варіаційний принцип найменшої дії [7].

Виділивши уявно елементарний кубик з ребрами, паралельними до осей координат, здійснимо деформацію середовища. Внаслідок цієї деформації в середовищі накопичується потенціальна енергія, яка обчислюється (з урахуванням інтегрального зв'язку) так [7]:

$$P^* = \int_V \frac{1}{2}\sum_{i,j} \sigma_{i,j}\varepsilon_{i,j} dV + \int_S \left(\frac{c_0}{2}\mathbf{u}^2 + \varphi(x_1, x_2, x_1, t) \right) dS, \tag{8}$$

де S – замкнена поверхня області інтегрування V (об'єм); $\varphi(x_1, x_2, x_1, t)$ – деяка функція, що враховує деформацію зсуву.

Диференціюючи за об'ємом вираз (4) та враховуючи (3), отримаємо вираз для знаходження густини потенціальної енергії сил пружності під час малих деформацій:

$$\frac{\partial P^*}{\partial V} \equiv P = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\sigma_{i,j}\varepsilon_{i,j} = \frac{\lambda}{2}(\varepsilon_{rr})^2 + \mu \sum_{i,j}\varepsilon_{i,j}\varepsilon_{i,j}. \tag{9}$$

Підставляючи (3) в (5), отримаємо

$$P = \frac{\lambda}{2}(\nabla\cdot\mathbf{u})^2 + \mu\left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2\right) + \frac{\mu}{2}\left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)^2\right). \tag{10}$$

Диференціюючи за часом (2), отримаємо

$$\frac{\partial \varepsilon_{i,j}}{\partial t} \equiv v_{i,j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial t} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial t}\right), \tag{11}$$

де $v_{i,j}$ – компоненти тензора швидкості зміни деформації.

Функція внутрішньої дисипації енергії залежить від швидкості зміни потенціальної енергії, яка накопичена в системі, а функція зовнішньої дисипації залежить виключно від кінетичної енергії [8]. Тоді, враховуючи фізичні міркування та дотримуючись гіпотези про залежність дисипації енергії в пружному середовищі від величин нормальних та тангенціальних напружень [4], уведемо поняття тензора внутрішньої дисипації з компонентами $\varsigma_{i,j}$, які знаходимо подібно до компонентів тензора напруження [5, 7]:

$$\varsigma_{i,j} \equiv \begin{pmatrix} \varsigma_{x,x} & \varsigma_{x,y} & \varsigma_{x,z} \\ \varsigma_{y,x} & \varsigma_{y,y} & \varsigma_{y,z} \\ \varsigma_{z,x} & \varsigma_{z,y} & \varsigma_{z,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta F_{x,x}/\Delta y\Delta z & \Delta F_{y,x}/\Delta x\Delta z & \Delta F_{z,x}/\Delta x\Delta y \\ \Delta F_{x,y}/\Delta y\Delta z & \Delta F_{y,y}/\Delta x\Delta z & \Delta F_{z,y}/\Delta x\Delta y \\ \Delta F_{x,z}/\Delta y\Delta z & \Delta F_{y,z}/\Delta x\Delta z & \Delta F_{z,z}/\Delta x\Delta y \end{pmatrix}, \tag{12}$$

де $F_{i,j}$ $(i, j = x, y, z)$ – проекції векторів сил внутрішньої дисипації $(\mathbf{F}_i)$, що діють на відповідні елементарні площинки, нормалі яких паралельні до просторових ортів (i), тобто самі площинки перпендикулярні до згаданих проекцій сил; Δj – розміри елементарних площинок деформації. Нагадаємо, що вектори сили пружності ($\mathbf{F}_{\mathbf{n},i}$) і сили внутрішньої дисипації $(\mathbf{F}_i)$ є колінеарними; а $\sigma_{i,j}$ є тензором [7], то, величина $\varsigma_{i,j}$ є також за означенням тензором.

За згаданих припущень, компоненти тензора внутрішньої дисипації на підставі (1) запишемо так:

$$\varsigma_{i,j} = \sum_{k,l=1}^{3} S_{i,j,k,l} v_{k,l} \qquad (i, j = 1,2,3), \tag{13}$$

де $S_{i,j,k,l}$ – елементи тензора четвертого рангу, який утворюється за числовими значеннями коефіцієнтів внутрішньої дисипації. Враховуючи наші припущення щодо ізотропності матеріалу на підставі (3) та (8), вигляд елементів тензора внутрішньої дисипації істотно спрощується:

$$\varsigma_{i,j} = \xi_1 v_{rr}\delta_{i,j} + 2\xi_2 v_{i,j}, \tag{14}$$

де ξ_1, ξ_2 – коефіцієнти дисипації в пружному середовищі; $v_{rr} = \nabla\cdot\partial\mathbf{u}/\partial t$.

Вираз дисипативної функції запишемо за аналогією до (4):

$$\Phi^*_{p2} = \int_V \frac{1}{2}\sum_{i,j}\varsigma_{i,j}v_{i,j}dV + \int_S \left(\frac{\nu_0}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right)^2 + \psi(x_1, x_2, x_1, t)\right)dS\,, \tag{15}$$

де $\psi(x_1, x_2, x_1, t)$ – функція, що враховує дисипацію під час деформації зсуву.

Диференціюючи за об’ємом (11) та враховуючи (10), отримаємо вираз для знаходження густини функції внутрішньої дисипації:

$$\frac{\partial \Phi^*_{p2}}{\partial V} \equiv \Phi_{p2} = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\varsigma_{i,j}v_{i,j} = \frac{\xi_1}{2}(v_{rr})^2 + \xi_2\sum_{i,j}v_{i,j}v_{i,j}\,. \tag{16}$$

Враховуючи (14) та (16), запишемо вираз для знаходження густини функції внутрішньої дисипації енергії:

$$\Phi_2 = \int_0^t \left[\frac{\xi_1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\mathbf{u}\right)^2 + \xi_2\left(\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3\partial t}\right)^2\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\xi_2}{2}\left(\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2\partial t} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3\partial t} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3\partial t} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2\partial t}\right)^2\right)\right]_{|t=\tau} d\tau\,. \tag{17}$$

Густину кінетичної енергії на підставі [32] запишемо так:

$$T = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right)^2 \equiv \frac{\rho}{2}\left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial t}\right)^2\right). \tag{18}$$

Нехай для пружного середовища зовнішня дисипація енергії та енергія активних сил непотенціального характеру в системі відсутні:

$$\Phi_1 \equiv 0;\; D = 0\,. \tag{19}$$

Рівняння Ейлера за умови $\mathbf{q} = \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t) \equiv \mathbf{u}(x, y, z, t)$ виглядатиме так:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_z}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_{xt}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_{yt}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_{zt}}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_t}\right) = 0\,, \tag{20}$$

Внутрішні похідні в рівнянні (20) виглядають так:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_i} \equiv \frac{\partial}{\partial q_i^x}\mathbf{x}_0 + \frac{\partial}{\partial q_i^y}\mathbf{y}_0 + \frac{\partial}{\partial q_i^z}\mathbf{z}_0\;;\; \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_{ti}} \equiv \frac{\partial}{\partial q_{ti}^x}\mathbf{x}_0 + \frac{\partial}{\partial q_{ti}^y}\mathbf{y}_0 + \frac{\partial}{\partial q_{ti}^z}\mathbf{z}_0 \quad (i = x, y, z)\,, \tag{21}$$

де $\mathbf{x}_0; \mathbf{y}_0; \mathbf{z}_0$ – одиничні орти.

Враховуючи вирази (10), (17), (19), густина модифікованого лагранжіана (5) виглядатиме так:

$$L = \frac{\rho}{2}\mathbf{q}_t^2 - \frac{\lambda}{2}\left(q_x^x + q_y^y + q_z^z\right)^2 - \mu\left(\left(q_x^x\right)^2 + \left(q_y^y\right)^2 + \left(q_z^z\right)^2\right) - \frac{\mu}{2}\left(\left(q_y^x + q_x^y\right)^2 + \left(q_z^x + q_x^z\right)^2 + \left(q_z^y + q_y^z\right)^2\right) +$$
$$+ \int_0^t \left[\frac{\xi_1}{2}(q_{xt}^x + q_{yt}^y + q_{zt}^z)^2 + \xi_2\left((q_{xt}^x)^2 + (q_{yt}^y)^2 + (q_{zt}^z)^2\right) + \frac{\xi_2}{2}\left((q_{yt}^x + q_{xt}^y)^2 + (q_{zt}^x + q_{xt}^z)^2 + (q_{zt}^y + q_{yt}^z)^2\right)\right]_{|t=\tau} d\tau\,. \tag{22}$$

Підставляючи (22) в (20) та розписуючи послідовно усі доданки, попередньо змінюючи черговість диференціювання та застосовуючи теорему про похідну інтеграла за верхньою межею, отримаємо

$$-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_x} \equiv -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial q_x^x}\mathbf{x}_0 + \frac{\partial L}{\partial q_x^y}\mathbf{y}_0 + \frac{\partial L}{\partial q_x^z}\mathbf{z}_0\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_x}\left[-\frac{\lambda}{2}\left(q_x^x + q_y^y + q_z^z\right)^2 - \mu\left(\left(q_x^x\right)^2 + \left(q_y^y\right)^2 + \left(q_z^z\right)^2\right) - \right.$$

$$-\frac{\mu}{2}\left(\left(q_y^x+q_x^y\right)^2+\left(q_z^x+q_x^z\right)^2+\left(q_z^y+q_y^z\right)^2\right)\Bigg]=-\frac{\partial}{\partial x}\Big(-\lambda(q_x^x+q_y^y+q_z^z)\mathbf{x}_0-2\mu q_x^x\mathbf{x}_0-\mu(q_y^x+q_x^y)\mathbf{y}_0-$$

$$-\mu(q_z^x+q_x^z)\mathbf{z}_0\Big)=\frac{\partial}{\partial x}\Big(\lambda(q_x^x+q_y^y+q_z^z)\mathbf{x}_0+\mu(q_x^x\mathbf{x}_0+q_y^x\mathbf{y}_0+q_z^x\mathbf{z}_0)+\mu(q_x^x\mathbf{x}_0+q_x^y\mathbf{y}_0+q_x^z\mathbf{z}_0)\Big); \quad (23)$$

$$-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_y}\equiv-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial L}{\partial q_y^x}\mathbf{x}_0+\frac{\partial L}{\partial q_y^y}\mathbf{y}_0+\frac{\partial L}{\partial q_y^z}\mathbf{z}_0\right)=\frac{\partial}{\partial y}\Big(\lambda(q_x^x+q_y^y+q_z^z)\mathbf{y}_0+$$

$$+\mu(q_x^y\mathbf{x}_0+q_y^y\mathbf{y}_0+q_z^y\mathbf{z}_0)+\mu(q_y^x\mathbf{x}_0+q_y^y\mathbf{y}_0+q_y^z\mathbf{z}_0)\Big); \quad (24)$$

$$-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_z}\equiv-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial L}{\partial q_z^x}\mathbf{x}_0+\frac{\partial L}{\partial q_z^y}\mathbf{y}_0+\frac{\partial L}{\partial q_z^z}\mathbf{z}_0\right)=\frac{\partial}{\partial z}\Big(\lambda(q_x^x+q_y^y+q_z^z)\mathbf{z}_0+$$

$$+\mu(q_x^z\mathbf{x}_0+q_y^z\mathbf{y}_0+q_z^z\mathbf{z}_0)+\mu(q_z^x\mathbf{x}_0+q_z^y\mathbf{y}_0+q_z^z\mathbf{z}_0)\Big); \quad (25)$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_{xt}}\equiv-\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{xt}^x}\mathbf{x}_0+\frac{\partial L}{\partial q_{xt}^y}\mathbf{y}_0+\frac{\partial L}{\partial q_{xt}^z}\mathbf{z}_0\right)=-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_{xt}}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\Bigg[-\frac{\xi_1}{2}\left(q_{xt}^x+q_{yt}^y+q_{zt}^z\right)^2-$$

$$-\xi_2\left(\left(q_{xt}^x\right)^2+\left(q_{yt}^y\right)^2+\left(q_{zt}^z\right)^2\right)-\frac{\xi_2}{2}\left(\left(q_{yt}^x+q_{xt}^y\right)^2+\left(q_{zt}^x+q_{xt}^z\right)^2+\left(q_{zt}^y+q_{yt}^z\right)^2\right)\Bigg]_{t=\tau}d\tau=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_{xt}}\Bigg[-\frac{\xi_1}{2}(q_{xt}^x+q_{yt}^y+q_{zt}^z)^2-\xi_2\left(\left(q_{xt}^x\right)^2+\left(q_{yt}^y\right)^2+\left(q_{zt}^z\right)^2\right)-\frac{\xi_2}{2}\left(\left(q_{yt}^x+q_{xt}^y\right)^2+\left(q_{zt}^x+q_{xt}^z\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(q_{zt}^y+q_{yt}^z\right)^2\right)\Bigg]=\frac{\partial}{\partial x}\Big(\xi_1(q_{xt}^x+q_{yt}^y+q_{zt}^z)\mathbf{x}_0+\xi_2(q_{xt}^x\mathbf{x}_0+q_{yt}^x\mathbf{y}_0+q_{zt}^x\mathbf{z}_0)+\xi_2(q_{xt}^x\mathbf{x}_0+q_{xt}^y\mathbf{y}_0+q_{xt}^z\mathbf{z}_0)\Big); \quad (26)$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial y\partial t}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_{yt}}\equiv-\frac{\partial^2}{\partial y\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{yt}^x}\mathbf{x}_0+\frac{\partial L}{\partial q_{yt}^y}\mathbf{y}_0+\frac{\partial L}{\partial q_{yt}^z}\mathbf{z}_0\right)=\frac{\partial}{\partial y}\Big(\xi_1(q_{xt}^x+q_{yt}^y+$$

$$+q_{zt}^z)\mathbf{y}_0+\xi_2(q_{xt}^y\mathbf{x}_0+q_{yt}^y\mathbf{y}_0+q_{zt}^y\mathbf{z}_0)+\xi_2(q_{yt}^x\mathbf{x}_0+q_{yt}^y\mathbf{y}_0+q_{yt}^z\mathbf{z}_0)\Big); \quad (27)$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial z\partial t}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_{zt}}\equiv-\frac{\partial^2}{\partial z\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{zt}^x}\mathbf{x}_0+\frac{\partial L}{\partial q_{zt}^y}\mathbf{y}_0+\frac{\partial L}{\partial q_{zt}^z}\mathbf{z}_0\right)=\frac{\partial}{\partial z}\Big(\xi_1(q_{xt}^x+q_{yt}^y+q_{zt}^z)\mathbf{z}_0+$$

$$+\xi_2(q_{xt}^z\mathbf{x}_0+q_{yt}^z\mathbf{y}_0+q_{zt}^z\mathbf{z}_0)+\xi_2(q_{zt}^x\mathbf{x}_0+q_{zt}^y\mathbf{y}_0+q_{zt}^z\mathbf{z}_0)\Big); \quad (28)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_t}=-\frac{\rho}{2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_t}\mathbf{q}_t^2=-\rho\mathbf{q}_{tt}\,. \quad (29)$$

Додаючи вирази (23) – (29) та групуючи у відповідний спосіб доданки, отримаємо

$$\rho\mathbf{q}_{tt}=(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{q})+\mu\nabla^2\mathbf{q}+(\xi_1+\xi_2)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{q}_t)+\xi_2\nabla^2\mathbf{q}_t\,, \quad (30)$$

а взявши до уваги: $\mathbf{q}=\mathbf{u}$ та застосовуючи відому теорему векторного аналізу [7] $\nabla^2\mathbf{u}\equiv\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u})-$ $-\nabla\times\nabla\times\mathbf{u}$, запишемо остаточно рівняння вільних коливань пружного ізотропного середовища з урахуванням дисипації:

$$\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}=\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u})-\frac{\mu}{\rho}\nabla\times\nabla\times\mathbf{u}+\frac{\xi_1+2\xi_2}{\rho}\frac{\partial}{\partial t}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u})-\frac{\xi_2}{\rho}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\nabla\times\mathbf{u}\,. \quad (31)$$

У рівнянні (31) чітко проглядаються фізичні процеси в пружному ізотропному середовищі. Так, перший доданок характеризує деформацію стиску (розтягу), а другий – деформацію зсуву у цьому ж середовищі [7]. Відповідно третій доданок характеризує внутрішню дисипацію під час деформації стиску (розтягу), а четвертий – під час деформації зсуву (згідно з гіпотезою про залежність дисипації енергії в пружному середовищі під час коливань від величин нормальних та тангенціальних напружень [4]). Насправді ж у пружно-дисипативному середовищі присутня єдина деформація, яку можна лише уявно розділити на дві складові.

Висновки:

1. Одержання рівняння вільних коливань пружного ізотропного середовища з урахуванням дисипації (рівняння Ламе з урахуванням дисипації) доцільно здійснювати на підставі інтегрального варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського з урахуванням модифікованої функції Лагранжа [8].
2. Побудова рівняння Ламе з урахуванням внутрішньої дисипації запотребувало введення тензора дисипації.
3. Розв’язок рівняння (31) доцільно здійснювати шляхом дискретизації просторових похідних за методом сіток або методом скінченних елементів з подальшою дискретизацією в часовій області.

1. Уайт Д., Вудсон Г. Электромеханическое преобразование энергии. – М. – Л.: Энергия, 1964. – 528 с. 2. Булгаков М., Головач І.В., Черниш О.М. Моделювання і аналіз вібраційного процесу викопування коренеплодів буряка // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні. – 2006.– №40. – С. 39 – 48. 3. Вікович І.А., Височька Х.А. Згинні коливання фермово-решітчастої конструкції начіпної штанги мобільного обприскувача з під’єднаним дірчастим трубопроводом // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні. – 2006.– №40. – С. 48 – 56. 4. Писаренко Г.С., Богинич О.Е. Колебания кинематически возбуждаемых механических систем с учетом диссипации энергии. – К.: Наукова думка, 1981. – 220 с. 5. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике: Соч. в 9-ти т. – М.: Мир. – 1966. 6. Чабан А. Математична модель глибокопазного асинхронного мотора у фазних координатах // Теоретична електротехніка. – 2005. – Вип. 68. – С. 104–112. 7. Мышкис А.Д. Математика: Спец. курсы. – М.: Наука, 1971. – 632 с. 8. Чабан А. Застосування інтегрального варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського для одержання рівнянь крутильних коливань вала // Машинознавство. – 2005. – №9. – С. 10 – 14.