

ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНІСТЬ ВСТАНОВЛЕНИХ СТАНІВ АНАЛОГОВОЇ НЕЙРОННОЇ СХЕМИ ВИЗНАЧЕННЯ НАЙБІЛЬШИХ СИГНАЛІВ

© Тимощук П., Тимощук М., 2011

Проаналізовано існування та єдиність усталених станів K-Winner-Take-All (KWTA) – нейронної схеми. Розглянуто час обробки схемою сигналів, властивість збереження впорядкованості сигналів, роздільну здатність і точність функціонування схеми. Наведено результати комп’ютерного моделювання, які підтверджують теоретичні передбачення і демонструють ефективність схеми.

Ключові слова: аналогова KWTA нейронна схема, існування та єдиність, час обробки, властивість збереження впорядкованості сигналів, роздільна здатність.

An existence and uniqueness of K-Winner-Take-All (KWTA) – neural circuit steady states are analyzed. The circuit processing time, signal ordering preserving property, circuit resolution ability and functioning accuracy are discussed. Simulation results confirming theoretical predictions and demonstrating performance of the circuit are provided.

Keywords: analogue KWTA neural circuit, existence and uniqueness, processing time, signal ordering preserving property, resolution ability.

Вступ

Відомо, що K-winners-take all (KWTA) нейронні мережі ідентифікують K найбільших з-поміж N вхідних сигналів, де $1 \leq K < N$. У частковому випадку, коли K дорівнює одиниці, KWTA мережа є Winner-take all (WTA) мережею, яка здатна визначати максимальний з множини N вхідних сигналів [1–3].

KWTA мережі мають різноманітні застосування, зокрема вони є ключовими частинами задач прийняття рішень, розпізнавання образів, взаємопов’язаних пам’ятей, конкуруючого навчання і класифікації [4–8]. Такі мережі дуже поширені як фундаментальні елементи у телекомунікаціях, зокрема, для керування пакетними перемикачами даних [9], фільтруванням [10–12], сортуванням [12], декодуванням [13], обробкою зображень [14], обробкою сигналів [15], відеосистемами [16, 17], кластеризацією [18], машинним навчанням [19], навігацією мобільних роботів [20], виділенням ознак [21]. KWTA мережі можна застосовувати для підвищення ефективності виробництва, у технічній і медичній діагностиці з використанням комп’ютерів, фінансах, відслідковуванні і отриманні інформації, отриманні і аналізі даних, прогнозуванні, навчанні, аналізі оглядів і анкет на різні теми [22].

Оскільки енергетичні функції існуючих KWTA мереж не мають єдиного глобального мінімуму, вихідні сигнали таких мереж можуть збігатись до різних усталених станів, що знижує точність функціонування і перешкоджає їх застосуванню для обробки сигналів у реальному часі [23–28].

У [29] було запропоновано математичну модель неперервного часу і відповідну аналогову KWTA нейронну структурно-функціональну схему з $O(N)$ взаємозв’язками, сконструйовану в одношарову архітектуру, яка для отримання K переможців динамічно зсуває вхідні сигнали. Модель, що ґрунтується на рівнянні стану з розривною правою частиною і вихідному рівнянні,

здатна обробляти сигнали з будь-якою заданою мінімальною швидкістю. Швидкість обробки сигналів схемою може керуватись її єдиним параметром. Схема реалізується на аналогових суматорах, перемножувачах, інтеграторі і перемикачах, які дають можливість обробляти сигнали реального часу, використовуючи технології великих інтегральних схем. Схема відзначається невисокою архітектурною і обчислювальною складністю і здатна обробляти довільні сигнали, які можна розрізнати, розміщені у довільному скінченному діапазоні.

У цій статті на основі теорії диференціальних рівнянь з розривними правими частинами Філіппова [30, 31] доведено існування та єдиність встановлених станів KWTA нейронної схеми, представленої в [29]. Це гарантує точність її функціонування і дає можливість застосовувати схему для обробки сигналів реального часу. Аналізуються час обробки сигналів такою схемою і властивість збереження впорядкованості сигналів. Обговорюються практична роздільна здатність і точність функціонування схеми. Розглядається приклад з відповідним комп'ютерним моделюванням, що демонструє ефективність схеми.

Математична модель і структурно-функціональна схема

Нехай задано N дійсних чисел від a_1 до a_N , $N > 1$, тобто a_1, a_2, \dots, a_N як миттєвих значень невідомих сигналів і необхідно ідентифікувати K найбільших з них, які називаються переможцями, де $1 \leq K < N$ – позитивне ціле. Вважаємо, що задані числа не однакові (або їх можна розрізнати) і розміщені у спадній послідовності за величиною так, що задовольняються нерівності виду:

$$\infty > a_1 > a_2 > \dots > a_N > -\infty, \quad (1)$$

де індекси $1, 2, \dots, N$ можуть у загальному випадку відрізнятися від справжніх номерів вхідних сигналів, означаючи, що компоненти вектора $a = [a_1, \dots, a_N]$ впорядковані. Нижче описано математичну модель неперервного часу аналогової KWTA нейронної схеми, яка обробляє вхідний вектор a так, що після скінченного часу збіжності отримується вектор $b = [b_1, \dots, b_N]$ вихідних сигналів схеми, який задовольняє нерівності

$$\begin{aligned} b_i &> 0, i \in 1, 2, \dots, K; \\ b_j &< 0, j \in K + 1, K + 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (2)$$

Нерівності (2) описують KWTA властивість, тобто той факт, що, оскільки тільки вихідні сигнали від b_1 до b_K є позитивними компонентами b , то вхідні сигнали від a_1 до a_K є K найбільшими компонентами вектора a .

Оскільки вхідні сигнали (1) є такими, що їх можна розрізнати, для будь-якого $1 \leq K < N$ існує таке значення $x \in \mathfrak{R}$, що задовольняються нерівності виду:

$$\begin{aligned} a_i &> x, i \in 1, 2, \dots, K; \\ a_j &< x, j \in K + 1, K + 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (3)$$

Математична модель неперервного часу аналогової KWTA нейронної схеми описується так [29]:

$$\dot{x} = -\alpha \operatorname{sgn}(E(x)) \quad (4)$$

$$b_k = a_k - x, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (5)$$

де

$$\operatorname{sgn}(E(x)) = \begin{cases} 1, & \text{if } E(x) > 0, \\ 0, & \text{if } E(x) = 0, \\ -1, & \text{if } E(x) < 0 \end{cases} \quad (6)$$

– сигнум-функція,

$$E(x) = K - \sum_{k=1}^N S_k(x) \quad (7)$$

– різницева функція,

$$S_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } a_k - x > 0; \\ 0, & \text{if } a_k - x \leq 0 \end{cases} \quad (8)$$

– ступінчаста функція,

$$\begin{aligned} b_i &= a_i - x, i \in 1, 2, \dots, K; \\ b_j &= a_j - x, j \in K + 1, K + 2, \dots, N \end{aligned} \quad (9)$$

– вихідні сигнали схеми, (4) – рівняння стану із змінною стану x , $-\infty < x_0 < \infty$ – початкова умова, α – постійний параметр або коефіцієнт загасання, що використовується для керування швидкістю збіжності траєкторій стану до усталеного режиму, який задовольняє рівність $E(x) = 0$ і (5) – вихідне рівняння.

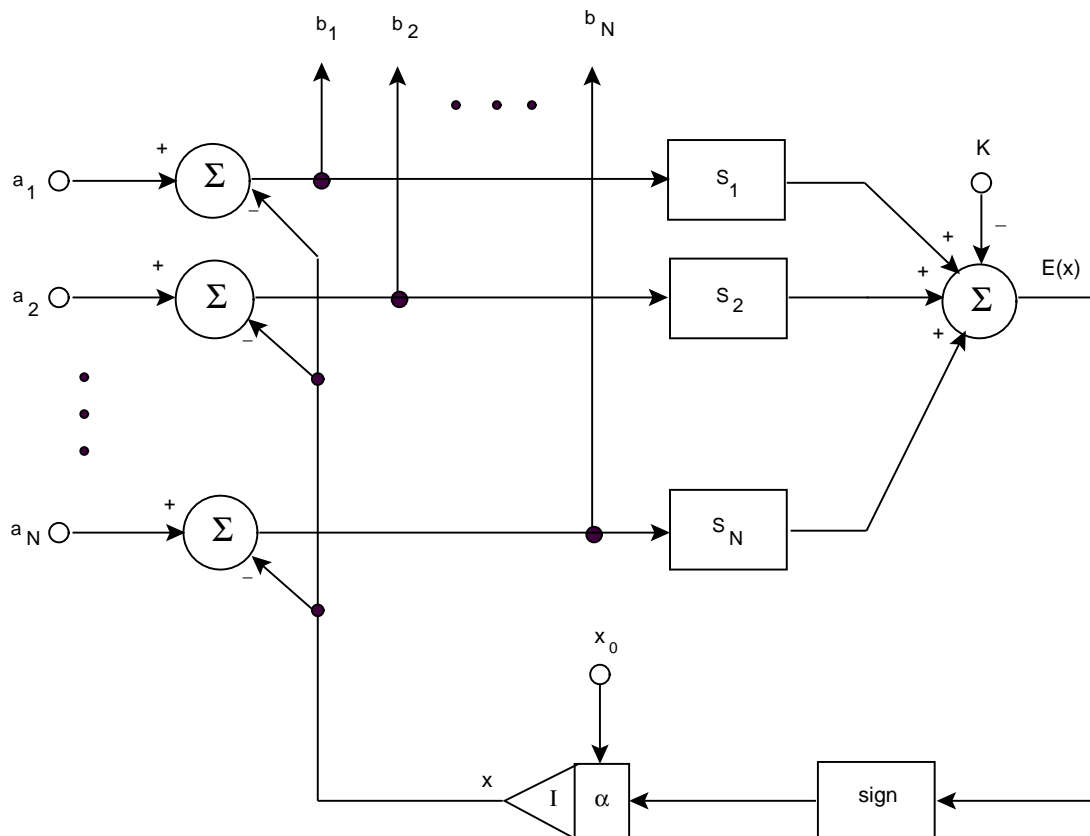


Рис. 1. Аналогова структурно-функціональна KWTА нейронна схема, що описується рівнянням стану (4) і вихідним рівнянням (5), де $a_1 \dots a_N$ – вхідні сигнали, Σ – суматор, I інтегратор з коефіцієнтом підсилення α , K і x_0 – зовнішні джерела постійних сигналів, S_1, \dots, S_N – блоки ступенчатої функції (8), $sign$ – блок сигнум-функції (6), $b_1 \dots b_N$ – вихідні сигнали

Відповідна структурно-функціональна схема, представлена на рис. 1, характеризується обмеженнями схемотехнічної реалізації, оскільки її функціональні елементи мають часові затримки, які в сумі визначають швидкість обробки сигналів відповідною реальною аналоговою нейронною схемою. Крім цього, для застосування до вхідних сигналів порогу x схема містить петлю зворотного зв'язку. Ця петля також додає часове обмеження у функціонування реальної схеми. Як можна побачити з рис. 1, час обробки однієї множини вхідних сигналів такою схемою можна подати у вигляді:

$$T = 2T_{\Sigma} + 2T_s + T_a + T_I, \quad (10)$$

де T_{Σ} , T_s , T_a і T_I – часові затримки підсумовування, перемикавання, підсилення та інтегрування відповідно. У найпростішому частковому випадку, коли потреби у застосуванні порогу x до вхідних сигналів

немає, вираз (10) спрощується до вигляду: $T = T_{\Sigma}$. Як можна побачити, час обробки однієї множини вхідних сигналів за схемою з рис. 1 може набувати значень від часової затримки підсумовування до суми часових затримок двох підсумовувань, двох перемикачів, одного підсилення і одного інтегрування.

Якщо необхідно обробляти більше ніж одну множину вхідних сигналів, то для отримання точних вихідних сигналів схеми період повторення множин вхідних сигналів повинен задовольняти нерівність

$$T_r < T. \quad (11)$$

Як відомо, аналогові суматори та інтегратори конструюються на основі операційних підсилювачів. Типовий час реакції (встановлення) операційного підсилювача може змінюватись від кількох сотень наносекунд до кількох міросекунд, а типовий час реакції аналогового перемикача може набувати значень від кількох наносекунд до кількох сотень наносекунд [32]. Тому час обробки однієї множини сигналів реальною нейронною схемою, що відповідає структурно-функціональній схемі з рис. 1, може змінюватись від кількох міросекунд до кількох сотень наносекунд.

Роздільна здатність і точність обробки сигналів реальною аналоговою нейронною схемою, реалізованою на основі структурно-функціональної схеми з рис. 1, обмежуються точністю функціонування блоків підсумовування, підсилення, інтегрування, логічних функцій і джерел постійних сигналів.

Існування та єдиність встановлених станів схеми

Як можна побачити, рівняння стану (4) містить розривну праву частину, яка є кусково-неперервною. Існує кілька визначень узагальнених розв'язків диференціальних рівнянь з розривними правими частинами [30, 33]. В інженерії поширені розв'язки таких рівнянь у сенсі Філіппова [30]. Розглянемо розв'язки рівняння стану (4) Філіппова [31]. Для цього визначимо певну множину Δ як

$$\Delta := \{x : E(x) = 0\}. \quad (12)$$

Права частина рівняння стану (4) є розривною на кожній Δ . Покладемо, що усталений розв'язок рівняння (4) – скаляр $x^* \in \mathfrak{R}^n$ такий, що $x^* \in \Delta$ і множина Δ є поверхнею розриву. Проаналізуємо існування та єдиність розв'язків рівняння (4). Функція $\text{sign}(E(x))$ є кусково-постійною у певному скінченному діапазоні G простору x , тобто діапазон G складається з двох частин G_i ($i=1,2$), у кожній з яких функція $\text{sign}(E(x))$ – неперервна скрізь, крім множини Δ міри нуль, що містить точки границь цих частин [31, 34]. Сформулюємо таку теорему.

Теорема. Розглянемо розв'язок $x(t)$ рівняння стану (4), визначений для t на певному інтервалі T , де функція $\text{sign}(E(x))$ вимірювана у діапазоні G . Якщо задовольняється умова $|\alpha| < \infty$, тоді для будь-якої початкової точки $x_0 \in G$ розв'язок рівняння (4) існує.

Доведення. Розглянемо спочатку випадок, коли траєкторія розв'язку рівняння стану (4) не обмежується певною поверхнею розриву Δ , тобто коли $x \notin \Delta$ (або $E(x) \neq 0$) і справджується звичайне визначення розв'язку рівняння (4). Розв'язок рівняння стану (4) у цьому випадку можна подати у вигляді:

$$x(t) = \begin{cases} x_0 - \alpha t, & \text{if } E(x) > 0; \\ x_0 + \alpha t, & \text{if } E(x) < 0. \end{cases} \quad (13)$$

Як можна побачити з (13), якщо $x \notin \Delta$ і задовольняється умова $|\alpha| < \infty$, тоді існує розв'язок рівняння (4), який є локально єдиним для будь-якого $-\infty < x_0 < \infty$.

Розглянемо випадок, коли $x \in \Delta$ (або $E(x) = 0$). Оскільки вхідні сигнали є такими, що їх можна розрізнити і задовольняються нерівності (3), беручи до уваги (8), можна стверджувати, що існує таке постійне число x^* , яке задовольняє нерівність (7), тобто $E(x) = E(x^*) = K - \sum_{k=1}^N S_k(x^*) = 0$. Для кожного x^* згідно з (6) функція $\text{sgn } E(x)$ дорівнює нулю, і диференціальне рівняння (4) спрощується до виду $\dot{x} = 0$ зі сталим розв'язком $x = x^*$. ■

Наслідок. З теореми і рівностей (9) випливає, що КВТА вихідні сигнали, що описуються вихідними рівняннями (5), існують.

Якщо $x \in \Delta$, тоді розв'язок рівняння стану (4), що задовольняє рівність $E(x) = 0$, може набувати будь-яких значень у діапазоні $a_{k+1} \leq x < a_k$ для довільної скінченної початкової умови x_0 . Такий розв'язок – не єдиний, оскільки для кожного $x \in [a_{k+1}, a_k)$ задовольняється рівність $E(x)=0$. Тому вихідні сигнали $b_k = a_k - x$, $k=1,2,\dots,N$ – також не єдині. Однак, КВТА властивість моделі (4), (5) визначається знаками вихідних сигналів b_k , а не їх значеннями. При $a_{k+1} \leq x < a_k$ вказані знаки для кожного $b_i, i=1,2,\dots,K$ є позитивними. Тому нейронна схема, що описується моделлю (4), (5), для кожного скінченного x_0 володіє КВТА властивістю.

Розглянемо розв'язок рівняння стану (4) встановленого стану x^* і вихідні сигнали b_k , $k=1,2,\dots,N$, задані вихідними рівняннями (5). Якщо компоненти вхідного вектора a є такими, що їх можна розрізнити, тоді розв'язок рівняння (4) і вихідні сигнали b_k , визначені вихідними рівняннями (5), володіють двома властивостями, які дають можливість проектувати відповідні КВТА нейронні схеми:

1. Усталений розв'язок x^* рівняння (4) задовольняє нерівності (3).

2. K найбільших компонентів вхідного вектора a відповідають числу K позитивних компонентів вихідного вектора b , а решта $N - K$ компонентів вхідного вектора a відповідає $N - K$ негативних компонентів вихідного вектора b .

На основі вищевикладеного можна стверджувати, що існує таке $t^* > 0$, що для кожного $t > t^*$ задовольняються нерівності виду:

$$b_1(t) > \dots > b_K(t) > 0 > b_{K+1}(t) > \dots > b_N(t), \quad (14)$$

де $b_k(t) = a_k - x(t)$, $k = 1, 2, \dots, N$. Це означає, що змінна стану x рівняння (4) стартує з початкового значення x_0 і фінішує у стані x^* , який відповідає компонентам вихідного вектора b , розщепленим у позитивну і негативну площини згідно з нерівностями (2). У будь-який момент часу після t^* вихідні сигнали (5) володіють КВТА властивістю (2).

Для довільного $t > t^*$ нерівності (14) описують властивість збереження впорядкованості сигналів, тобто для будь-яких скінченних значень вхідних сигналів $a_k, k = 1, 2, \dots, N$ упорядкування вихідних сигналів є таким самим, як і упорядкування вхідних сигналів. Така властивість очевидна, оскільки для довільного $t \geq 0$ задовольняється умова $b_k = a_k - x(t)$, $k = 1, 2, \dots, N$. Інакше кажучи, вихідні сигнали дорівнюють вхідним сигналам мінус динамічний зсув, який є однаковим для кожного вхідного сигналу. Це призводить до виконання нерівностей (14), оскільки задовольняються умови (1). Отже, упорядкування вихідних сигналів схеми і упорядкування відповідних вхідних сигналів є однаковими для кожного із скінченних значень x та a_k , $k = 1, 2, \dots, N$.

Оскільки функціонування схеми не залежить від початкових умов, така схема для повторної обробки сигналів не вимагає періодичного скидання, відповідної керуючої схеми і додаткового часу. Це дає змогу спрощувати аналогове апаратне забезпечення і підвищувати швидкість обробки сигналів, що є важливим для обробки сигналів реального часу [19, 35–37].

Результати комп'ютерного моделювання схеми

Для ілюстрації теоретичних результатів, наведених у статті, розглянемо приклад з відповідним комп'ютерним моделюванням, що демонструє ефективність розглянутої аналогової КВТА нейронної схеми. Проаналізуємо функціонування схеми в умовах великої кількості вхідних сигналів. Нехай вхідні сигнали будуть однорідно розподілені на інтервалі $[0, A]$ і випадково генеруються у результаті здійснення експериментів Монте-Карло.

Нехай необхідно визначити сто найбільших сигналів, тобто $K=100$, серед двох сотень вхідних сигналів, тобто $N=200$ при $\alpha=100$, $A=500$, $x_0=0$. Траєкторії неперервного часу вихідних сигналів b_k , $k=1,2,3,\dots,100$, визначені за допомогою описаної вище моделі, показано на рис. 2, де

для кожного $t > t^*$ вихідний вектор b задовольняє нерівності (14). В усталеному стані, після часу збіжності t^* , сто позитивних компонентів вихідного вектора b відповідають сотні найбільших компонентів вхідного вектора a ; решта сто негативних компонентів вихідного вектора b мають такі самі індекси, як сто найменших компонентів вхідного вектора a – згідно з KWTA властивістю (2).

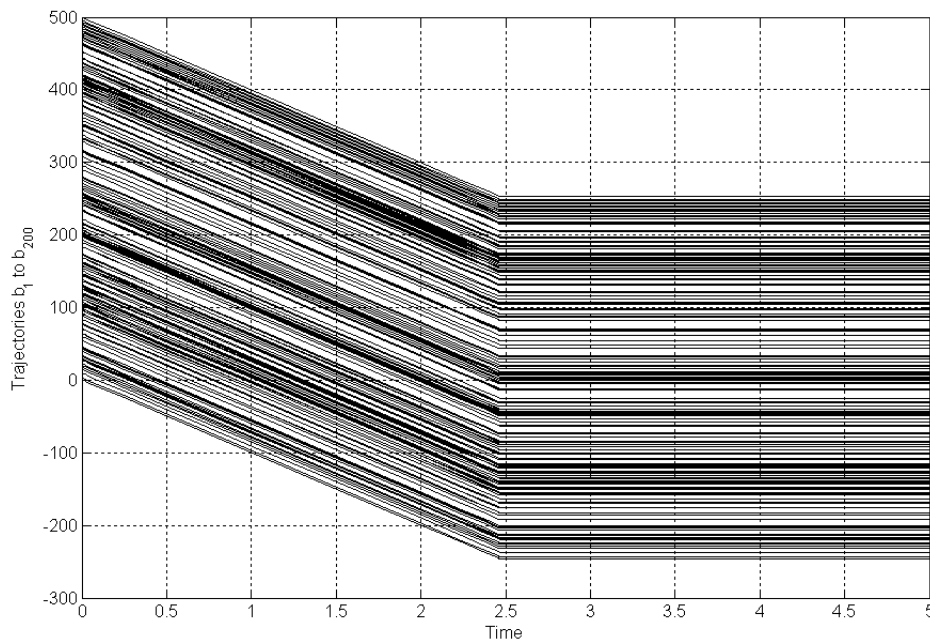


Рис. 2. Траєкторії неперервного часу, які демонструють KWTA властивість аналогової нейронної схеми, яка описується моделлю (4), (5) для ста вхідних сигналів при $K=100$, $N=200$. $\alpha = 100$, $A=500$, $x_0 = 0$, де після кожного $t > t^*$ вихідний вектор b задовольняє нерівність (14)

Отже, як можна побачити з результатів числових експериментів, функціонування вищепри-
саної KWTA нейронної схеми демонструє відповідність теоретичним передбаченням.

Висновки

У статті доведено існування та єдиність усталених режимів аналогової KWTA нейронної схеми, яка описується диференціальним рівнянням з кусково-постійною правою частиною і вихідним рівнянням. Це дає змогу гарантувати точність функціонування схеми і дає можливість використовувати її для обробки сигналів реального часу, оскільки схема не вимагає періодичного скидання і додаткової керуючої схеми для повторної обробки сигналів. Аналізують час обробки схемою сигналів і властивість збереження впорядкування сигналів. Обговорюються практична роздільна здатність і точність функціонування схеми. Представляються результати комп'ютерного моделювання, які демонструють ефективність схеми.

1. R. P. Lippmann, B. Gold, and M. L. Malpass, *A comparison of Hamming and Hopfield neural nets for pattern classification*, MIT Lincoln Laboratory Technical Report, TR-769, 1987, pp. 1–37. 2. E. Majani, R. Erlanson and Y. Abu-Mostafa, *On the K-winners-take-all network*, in: D. S. Touretzky (Ed.), *Advances in Neural Information Processing Systems*, vol. I, Kaufmann, San Mateo, 1989, pp. 634–642. 3. P. Tymoshchuk and E. Kaszkurewicz, "A Winner-take-all circuit based on second order Hopfield neural networks as building blocks", in *Proc. Int. Joint Conf. Neural Networks*, vol. II, Portland, OR, 2003, pp. 891–896. 4. B. J. Jain and F. Wysotzki, *A k-winner-takes-all classifier for structured data*, in: *Proceedings of 26th Annual German Conference on AI*, Springer LNCS, vol. 2821, 2003, pp. 342–354. 5. T. M. Kwon and M. Zervakis, *A parallel sorting network without comparators: A neural-network approach*, in: *Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks*, vol. 1, 1992, pp. 701–706. 6. P. O. Pouliquen, A. G. Andreou and A. G., K. Strohhahn, *Winner-takes-all associative memory: a hamming distance vector quantizer*, *Analogue Integrated Circuits and Signal Processing* 13 (1997) 211–222. 7. K. Urahama and T. Nagao, *K-Winner-take-all circuit*

with $O(n)$ complexity, *IEEE Transactions on Neural Networks* 6 (1995) 776–778. 8. J. C. Yen, J. I. Guo, and H. – C. Chen, A new k -Winners-take all neural network and its array architecture, *IEEE Transactions on Neural Networks* 9 (1998) 901–912. 9. L. N. Bihn and H. C. Chong, A neural-network contention controller for packet switching networks, *IEEE Transactions on Neural Networks* 6 (1995) 1402–1410. 10. U. Cilingiroglu and T. L. E. Dake, Rank-order filter design with a sampled-analogue multiple-winners-take-all core, *IEEE Journal on Solid-State Circuits* 37 (2002) 978–984. 11. A. Fish, D. Turchin, and O. Yadid-Pecht, An APS with 2-Dimensional winner-take-all selection employing adaptive spatial filtering and false alarm reduction, *IEEE Transactions on Electron Devices* 50 (2003) 159–165. 12. T. M. Kwon and M. Zervakis, KWTA networks and their applications, *Multidimensional Systems and Signal Processing* 6 (1995) 333–346. 13. R. Erlanson and Y. Abu-Mostafa, Analogue neural networks as decoders, in: D. S. Touretzky (Ed.), *Advances in Neural Information Processing Systems*, vol. 1, Kaufmann, San Mateo, 1991, pp. 585–588. 14. A. Fish, D. Akselrod, O. Yadid-Pecht, High precision image centroid computation via an adaptive k -winner-take-all circuit in conjunction with a dynamic element matching algorithm for star tracking applications, *Analogue Integrated Circuits and Signal Processing* 39 (2004) 251–266. 15. A. K. J. Hertz and R. G. Palmer, *Introduction to the Theory of Neural Computation*, Addison-Wesley, Redwood City, 1991. 16. L. Itti, C. Koch and E. Niebur, A model of saliency-based visual attention for rapid scene analysis, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 20 (1998) 1254 – 1259. 17. D. Marr and T. Poggio, Cooperative computation of stereo disparity, *Science* 194 (1976) 283–287. 18. B. J. Jain and F. Wysotzki, Central clustering of attributed graphs, *Machine Learning* 56 (2004) 169–207. 19. S. Liu and J. Wang, A simplified dual neural network for quadratic programming with its KWTA application, *IEEE Transactions on Neural Networks*, 17 (2006) 1500–1510. 20. G. N. de Souza and A. C. Zak, Vision for mobile robot navigation: a survey, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 24 (2002) 237–267. 21. A. Yuille and D. Geiger, Winner-take-all networks, in: *The Handbook of Brain Theory and Neural Networks*, second ed., MIT, Cambridge, 2003, pp. 1228–1231. 22. D. Graupe, *Principles of Artificial Neural Networks (2nd Edition)*, World Scientific Publishing Co., Singapore and River Edge, N.J., 2007. 23. B. D. Calvert and C. A. Marinov, Another K -winners-take-all analogue neural network, *IEEE Transactions on Neural Networks* 4 (2000) 829–838. 24. C. A. Marinov and B. D. Calvert, Performance analysis for a K -winners-take-all analogue neural network: basic theory, *IEEE Transactions on Neural Networks* 14 (2003) 766–780. 25. R. Perfetti, On the robust design of k -winners-take-all networks, *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analogue and Digital Signal Processing CAS-42* (1995) 55–58. 26. W. J. Wolfe, D. Mathis, C. Anderson, J. Rothman, M. Gotler, G. Bragy, R. Walker, G. Duane, and G. Alaghand, K -Winner networks, *IEEE Transactions on Neural Networks* 2 (1991) 310–315. 27. J. C. Yen and S. Chang, A new first- k -winners neural network, in: *Proceedings of the ISANN, 1997, D-01-D-06*. 28. J. J. Hopfield, Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons, in: *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 81, USA, 1984, pp. 3088–3092. 29. P. V. Tymoshchuk, “A simplified continuous-time model of analogue K -winners-take-all neural circuit”, in *Proc. XI Int. Conf. “The Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics”*, Polyana-Svalyava, Ukraine, February 23–25, 2011, pp. 121–125. 30. A. F. Filippov, Differential equations with discontinuous righthand sides, *American Mathematical Society Translations* 42 (1964) 199–231. 31. A. F. Filippov, *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*, Kluwer, Dordrecht, 1988. 32. J. Wang, Analogue winner-take-all neural networks for determining maximum and minimum signals, *International Journal of Electronics* 77 (1994) 355–367. 33. O. Hajek, Discontinuous differential equations I, *Differential Equations* 32 (1979) 149–170. 34. E. A. Coddington and N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, New York, 1955. 35. C. A. Marinov and B. D. Calvert, Performance analysis for a K -winners-take-all analogue neural network: basic theory, *IEEE Transactions on Neural Networks* 14 (2003) 766–780. 36. C. A. Marinov and J. J. Hopfield, Stable computational dynamics for a class of circuits with $O(N)$ interconnections capable of KWTA and rank extractions, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications* 52 (2005) 949–959. 37. J. F. Yang, and C. M. Chen, A dynamic K -winners-take-all neural network, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* 27 (1997) 523–526.